Die Trinität als notwendige Struktur einer monistischen Modalontologie

Ein Beweisgang im Stil eines Schachjournalisten erklärt — Modal 5, Schritte 1–14

Paul Koop

Vorbemerkung: Wie diese Datei zu lesen ist

Diese Datei erklärt den Beweisgang aus Modal 5 so, wie ein Schachjournalist eine Schachpartie erklärt: Zug für Zug, mit Symbolerklärung bei jedem Schritt, mit Umgangssprache bei jeder Aussage. Sie können die Datei lesen, ohne selbst Schach — Verzeihung: ohne selbst Modallogik — spielen zu können. Am Ende werden Sie den Beweisgang **verstehen**, auch wenn Sie ihn nicht **selbst führen** könnten. Das ist das Ziel.

Die Datei ist in **drei Teile** gegliedert:

- **Teil I:** Die Grundbegriffe (S5, Tableau, Axiome, Grenzwerte, Superposition).
- **Teil II:** Der Beweisgang Zug für Zug (Nicht-Ableitbarkeit in S5, Ableitbarkeit in S5+SP).
- **Teil III:** Die metalogische Konsequenz (Minimalität, Nicht-Eindeutigkeit, Topologie).

Jeder Zug wird in **sechs Zeilen** erklärt:

```
BRETT      Was steht gerade im Tableau?
ZUG        Welche Regel wird angewendet?
SYMBOLE    Was bedeuten die Zeichen in diesem Zug?
WARUM      Warum diese Regel und keine andere?
UMGANG     Was heißt das in Alltagssprache?
NEU        Was ist neu im Tableau?
```

Teil I — Die Grundbegriffe

1. Was ist S5?

S5 ist ein modallogisches System. Es erweitert die klassische Logik um zwei Operatoren:

```
□p    "notwendig p"
◇p    "möglich p"

◇p := ¬□¬p
```

Symbolerklärung:

- □ (Box): “notwendig” — die Aussage gilt in allen erreichbaren Welten.
- ◇ (Diamond): “möglich” — die Aussage gilt in mindestens einer erreichbaren Welt.
- ¬ (Negation): “nicht”.
- := (Definition): “ist definiert als”.

In Umgangssprache: “Möglich p” heißt: “Es ist nicht notwendig, dass p nicht gilt.” Das klingt umständlich, ist aber die präzise Fassung.

Ein Kripke-Modell ist ein Tripel M = (W, R, I):

```
W   Menge von Welten
R   Zugänglichkeitsrelation (Teilmenge von W × W)
I   Interpretationsfunktion
```

Symbolerklärung:

- W: Menge der möglichen Welten.
- R: Relation “ist erreichbar von” zwischen Welten.
- I: ordnet jeder Welt Wahrheitswerte zu.
- ×: kartesisches Produkt (Menge aller Paare).

Wahrheitsbedingungen:

```
□p @w  gilt gdw  ∀v (w R v → p @v)
◇p @w  gilt gdw  ∃v (w R v ∧ p @v)
```

Symbolerklärung:

- @w: “gilt in der Welt w” (Weltindex).
- ∀v: “für alle Welten v” (Allquantor).
- ∃v: “es gibt eine Welt v” (Existenzquantor).
- →: “wenn … dann …” (Implikation).
- ∧: “und” (Konjunktion).
- gdw: “genau dann, wenn” (Äquivalenz in der Metasprache).

In Umgangssprache: □p gilt in w, wenn p in **allen** von w aus erreichbaren Welten gilt. ◇p gilt in w, wenn p in **mindestens einer** von w aus erreichbaren Welt gilt.

Die Axiome von S5:

```
K    □(p → q) → (□p → □q)
T    □p → p
4    □p → □□p
5    ◇p → □◇p
```

Symbolerklärung: → ist die Implikation. K, T, 4, 5 sind die Namen der Axiome (nach ihren traditionellen Bezeichnungen).

In Umgangssprache:

- **K:** Wenn “aus p folgt q” notwendig ist, dann folgt aus “notwendig p” auch “notwendig q”.
- **T:** Was notwendig ist, ist wirklich.
- **4:** Was notwendig ist, ist selbst notwendig.
- **5:** Was möglich ist, ist notwendig möglich.

Semantische Konsequenz: In S5 ist R eine **Äquivalenzrelation** (reflexiv, symmetrisch, transitiv). Alle Welten sind wechselseitig erreichbar.

In Umgangssprache: Es gibt keine “perspektivische” Einschränkung mehr. Was möglich ist, ist überall möglich. Was notwendig ist, ist überall notwendig.

Inferenzregeln:

```
Modus Ponens:  aus p und p → q folgt q
Necessitation: aus ⊢ p folgt ⊢ □p
```

Symbolerklärung:

- ⊢: “ist ableitbar” (Theorem-Zeichen).
- `Modus Ponens`: die Grundregel des Schließens.

In Umgangssprache: Modus Ponens ist die Regel “Wenn p gilt und aus p folgt q, dann gilt q”. Necessitation ist die Regel “Wenn p ein Theorem ist, dann ist auch □p ein Theorem”.

Wichtig: Necessitation gilt **nur** für Theoreme, nicht für Annahmen im Beweis. Sonst könnte man aus jeder Annahme ihre Notwendigkeit ableiten.

2. Tableau-Regeln — was ist das?

Ein **Tableau** ist ein Beweisverfahren durch **Widerlegung**. Man nimmt die **Negation** der zu beweisenden Formel an und zerlegt sie systematisch. Wenn alle Zweige **schließen** (Widerspruch), ist die Negation unerfüllbar — also die Formel **bewiesen**.

Die Idee in Umgangssprache: Man versucht, die Formel zu **widerlegen**. Wenn das nicht gelingt, ist sie bewiesen. Das ist wie beim Schach: Man versucht, den Gegner matt zu setzen. Wenn das nicht gelingt, ist die Stellung remis — oder man hat verloren.

Alpha-Regeln (keine Verzweigung):

```
~~A          →  A
A ∧ B        →  A, B
¬(A ∨ B)     →  ¬A, ¬B
¬(A → B)     →  A, ¬B
¬□A          →  ◇¬A
□A @w        →  A @v   für jede existierende Welt v
```

Symbolerklärung:

- ~ oder ¬: Negation.

- ∧: Konjunktion.
- ∨: Disjunktion.
- →: Implikation.
- □, ◇: Notwendigkeit, Möglichkeit.
- @w, @v: Weltindizes.

Beta-Regeln (Verzweigung):

```
A ∨ B          →  A | B
A → B          →  ¬A | B
¬(A ∧ B)       →  ¬A | ¬B
◇A             →  A @w_neu   (neue Welt)
```

Symbolerklärung: | bedeutet "Verzweigung" — das Tableau teilt sich in zwei Zweige.

Die entscheidende S5-Regel — die □-Regel:

```
□A @w  →  A @v   für jede bereits existierende Welt v
```

In Umgangssprache: Wenn □A in einer Welt w gilt, dann gilt A in **jeder** bereits existierenden Welt v — nicht nur in den von w erreichbaren. In S5 ist R universell, also "infiziert" □A alle Welten.

Metatheorem (Smullyan, Fitting): Eine Formelmenge Σ ist in einem S5-Modell **erfüllbar** gdw das Tableau für Σ einen **offenen Zweig** hat.

In Umgangssprache:

- **Tableau schließt** (alle Zweige ⊥) → Σ unerfüllbar → Zielformel Theorem.
- **Tableau offen** (mindestens ein Zweig ohne ⊥) → Σ erfüllbar → Gegenmodell → Zielformel kein Theorem.

Symbolerklärung: ⊥ ist das Falsum — der Widerspruch.

3. Die Axiome A1–A10

Familie A: Monismus und Realismus

```
A1   □¬∃x∃y FundamentalGetrennt(x,y)
A2   ∀p(Cons(p) → ◇Realisiert(p)) ∧ ∀p(◇p → ∃w Realisiert(w,p))
A3   □(N → ¬◇Welt)
A4   ◇∃w Welt(w)
```

Symbolerklärung:

- ∃x∃y: "es gibt x und es gibt y".
- `FundamentalGetrennt(x,y)`: Prädikat "x und y sind fundamental getrennt".
- `Cons(p)`: "p ist konsistent".
- `Realisiert(p)`: "p ist realisiert".

- `N`: das absolute Nichts.
- `Welt(w)`: “w ist eine Welt”.

In Umgangssprache:

- **A1:** Es gibt keine fundamental getrennten Bereiche.
- **A2:** Jede konsistente Möglichkeit ist irgendwo realisiert.
- **A3:** Das absolute Nichts erzeugt keine Welt.
- **A4:** Das modale Universum ist nicht leer.

Familie B: Bewusstsein und Erkenntnis

```
A5   ◇C
A7   □(C → ◇V_T)
A8   □(V_T(x) → V_T(V_T(x)))
A9   □(V_T(x) → T)
```

Symbolerklärung:

- `C`: Bewusstsein.
- `V_T`: vollständiges Wissen über T.
- `T`: Totalität.

In Umgangssprache:

- **A5:** Bewusstsein ist möglich.
- **A7:** Bewusstsein → vollständige Erkenntnis möglich.
- **A8:** Vollständiges Wissen weiß von sich selbst.
- **A9:** Wissen über T setzt T voraus.

Familie C: Gründung

```
A6   □(¬Nec(p) → ∃g Grund(g,p))
A10  □¬∃ unendliche Kette(g1, g2, ...)
```

Symbolerklärung:

- `Nec(p)`: “p ist notwendig”.
- `Grund(g,p)`: “g ist Grund von p”.
- `unendliche Kette`: eine Folge von Gründen ohne Ende.

In Umgangssprache:

- **A6:** Kontingentes braucht einen Grund.
- **A10:** Kein infiniter Regress.

4. Die Grenzwertstruktur (U, T, S)

Informale Definitionen:

```
T   := { x | U < x < S }
U   := lim_{x → inf} T
S   := lim_{x → sup} T
Tr  := U ∧ T ∧ S
```

Symbolerklärung:

- `{ x | ... }`: “die Menge aller x, für die gilt: …”.
- `<`: “kleiner als” (Ordnungsrelation).
- `lim`: “Grenzwert”.
- `inf`, `sup`: Infimum (unterer Grenzwert), Supremum (oberer Grenzwert).

In Umgangssprache:

- **T** ist das offene Intervall zwischen U und S.
- **U** ist der untere Grenzwert.
- **S** ist der obere Grenzwert.
- **Tr** ist die Konjunktion der drei.

Das Bild: (0,1) enthält 0,1; 0,5; 0,999 — aber nicht 0 und nicht 1. 0 ist Infimum, 1 ist Supremum. Beide gehören nicht zum Intervall.

5. Die Superpositionsaxiome (ASP1–ASP5)

```
ASP1   C @w_super
ASP2   ∀v (w_super R v → (C @v ↔ v = w_super))
ASP3   ∀x Tr(x) @w_super
ASP4   ∀v (w_super R v → ∀x Tr(x) @v)
ASP5   ∀v (v ≠ w_super → w_super R v)
```

Symbolerklärung:

- `w_super`: die ausgezeichnete Welt (Superposition).
- `R`: die Erreichbarkeitsrelation.
- `@w_super`, `@v`: Weltindizes.
- `↔`: Äquivalenz (“genau dann, wenn”).
- `=`: Identität.
- `≠`: Negation der Identität.

In Umgangssprache:

- **ASP1:** Bewusstsein gilt in w_super.
- **ASP2:** Bewusstsein gilt nur in w_super.
- **ASP3:** In w_super gilt die Trinität für alle x.
- **ASP4:** Was in w_super gilt, gilt in allen erreichbaren Welten.
- **ASP5:** Jede andere Welt ist von w_super aus erreichbar.

Teil II — Der Beweisgang Zug für Zug

Zug-für-Zug: Beweisgang A — S5 ⊬ □∀x Tr(x)

Ziel: Zeigen, dass das Tableau für ¬□∀x Tr(x) **offen** bleibt. Ein offener Zweig bedeutet: Es gibt ein S5-Modell, in dem die Axiome gelten, aber die Trinität nicht. Also ist die Trinität **kein** Theorem von S5 allein.

Die Ausgangsstellung: Wir negieren die Zielformel und schreiben sie in die erste Zeile des Tableaus.

Zug 1

```
BRETT       (leer – das Tableau beginnt)
ZUG         Annahme: ¬□∀x Tr(x)
SYMBOLE     ¬ = nicht; □ = notwendig; ∀x = für alle x; Tr = Trinität
WARUM       Das ist die Negation der Zielformel. Wir wollen zeigen, dass
            sie unhaltbar ist – also nehmen wir an, sie sei haltbar.
UMGANG      "Es ist nicht notwendig, dass alle x die Trinität erfüllen."
NEU         Zeile 1: ¬□∀x Tr(x)
```

Zug 2

```
BRETT       Zeile 1: ¬□∀x Tr(x)
ZUG         ¬□-Regel anwenden
SYMBOLE     ¬□A → ◇¬A  (Regel)
            ◇ = möglich
WARUM       Die Formel hat die Form ¬□A. Die einzige anwendbare Regel ist
            die ¬□-Regel. Sie besagt: ¬□A wird zu ◇¬A.
UMGANG      "Es ist möglich, dass nicht alle x die Trinität erfüllen."
NEU         Zeile 2: ◇¬∀x Tr(x)
```

Zug 3

```
BRETT       Zeile 2: ◇¬∀x Tr(x)
ZUG         ◇-Regel anwenden
SYMBOLE     ◇A → A @w_neu  (Regel)
            @w_neu = in einer neuen Welt
WARUM       Die Formel hat die Form ◇A. Die einzige anwendbare Regel ist
            die ◇-Regel. Sie erzeugt eine neue Welt w0.
UMGANG      "In einer neuen Welt w0 gilt: nicht alle x erfüllen die
Trinität."
NEU         Zeile 3: ¬∀x Tr(x) @w0
```

Zug 4

```
BRETT       Zeile 3: ¬∀x Tr(x) @w0
ZUG         ¬∀-Regel anwenden
SYMBOLE     ¬∀x A → ∃x ¬A  (Regel)
            ∃x = es gibt ein x
WARUM       Die Formel hat die Form ¬∀x A. Die einzige anwendbare Regel
            ist die ¬∀-Regel.
```

UMGANG "Es gibt ein x, das die Trinität nicht erfüllt — in w0."
NEU Zeile 4: ∃x ¬Tr(x) @w0

Zug 5

BRETT Zeile 4: ∃x ¬Tr(x) @w0
ZUG ∃-Regel anwenden
SYMBOLE ∃x A → A[a/x] (Regel)
a = ein neues Individuum
WARUM Die Formel hat die Form ∃x A. Die einzige anwendbare Regel ist die ∃-Regel. Sie führt ein neues Individuum a ein.
UMGANG "Für ein bestimmtes Individuum a gilt in w0: a erfüllt die Trinität nicht."
NEU Zeile 5: ¬Tr(a) @w0

Zug 6

BRETT Zeile 5: ¬Tr(a) @w0
ZUG Definition Tr einsetzen
SYMBOLE Tr := U ∧ T ∧ S (Definition)
∧ = und
WARUM Die Formel enthält Tr. Tr ist definiert als U ∧ T ∧ S. Also darf die Definition eingesetzt werden.
UMGANG "Es ist nicht der Fall, dass a gleichzeitig U, T und S erfüllt."
NEU Zeile 6: ¬(T(a) ∧ U(a) ∧ S(a)) @w0

Zug 7

BRETT Zeile 6: ¬(T(a) ∧ U(a) ∧ S(a)) @w0
ZUG ¬∧-Regel anwenden
SYMBOLE ¬(A ∧ B) → ¬A | ¬B (Regel)
| = Verzweigung
WARUM Die Formel hat die Form ¬(A ∧ B). Die ¬∧-Regel verzweigt in drei Zweige (weil drei Konjunkte).
UMGANG "Entweder a erfüllt T nicht, oder a erfüllt U nicht, oder a erfüllt S nicht."
NEU Drei Zweige:
6a: ¬T(a) @w0
6b: ¬U(a) @w0
6c: ¬S(a) @w0

Zug 8 (Zweig 6a)

BRETT Zweig 6a: ¬T(a) @w0
ZUG A15 anwenden (□-Regel, dann ∀-Regel, dann →-Regel)
SYMBOLE A15 := □∀x (S(x) → T(x))
□-Regel: □A @w → A @v
∀-Regel: ∀x A → A[a/x]
→-Regel: A → B → ¬A | B
WARUM A15 ist als □-Formel verfügbar. Die □-Regel macht sie zu ∀x (S(x) → T(x)) @w0. Die ∀-Regel macht sie zu S(a) → T(a) @w0. Die →-Regel verzweigt in ¬S(a) | T(a).

```
UMGANG      "Aus A15 folgt: Wenn a S erfüllt, dann erfüllt a T.
            Also: Entweder a erfüllt S nicht, oder a erfüllt T."
NEU         Verzweigung:
            8a: ¬S(a) @w0
            8b: T(a) @w0  ← Widerspruch zu 6a (¬T(a))
            Zweig 8b schließt (⊥).
            Wir bleiben bei 8a: ¬S(a) @w0.
```

Zug 9 (Zweig 6a, Fortsetzung)

```
BRETT       Zweig 6a: ¬T(a) @w0, ¬S(a) @w0
ZUG         A13 anwenden (□-Regel, dann ∀-Regel, dann →-Regel)
SYMBOLE     A13 := □∀x (T(x) → U(x))
WARUM       A13 ist als □-Formel verfügbar. Die □-Regel macht sie zu
            ∀x (T(x) → U(x)) @w0. Die ∀-Regel macht sie zu
            T(a) → U(a) @w0. Die →-Regel verzweigt in ¬T(a) | U(a).
UMGANG      "Aus A13 folgt: Wenn a T erfüllt, dann erfüllt a U.
            Also: Entweder a erfüllt T nicht, oder a erfüllt U."
NEU         Verzweigung:
            9a: ¬T(a) @w0  ← bereits in 6a
            9b: U(a) @w0
            Wir wählen 9a (konsistent mit 6a).
```

Zug 10 (Zweig 6a, Fortsetzung)

```
BRETT       Zweig 6a: ¬T(a), ¬S(a), ¬T(a) @w0
ZUG         A14 anwenden (□-Regel, dann ∀-Regel, dann →-Regel)
SYMBOLE     A14 := □∀x (U(x) → S(x))
WARUM       A14 ist als □-Formel verfügbar. Die □-Regel macht sie zu
            ∀x (U(x) → S(x)) @w0. Die ∀-Regel macht sie zu
            U(a) → S(a) @w0. Die →-Regel verzweigt in ¬U(a) | S(a).
UMGANG      "Aus A14 folgt: Wenn a U erfüllt, dann erfüllt a S.
            Also: Entweder a erfüllt U nicht, oder a erfüllt S."
NEU         Verzweigung:
            10a: ¬U(a) @w0
            10b: S(a) @w0  ← Widerspruch zu 8a (¬S(a))
            Zweig 10b schließt (⊥).
            Wir bleiben bei 10a: ¬U(a) @w0.
```

Ergebnis von Zweig 6a

```
BRETT       Zweig 6a: ¬T(a), ¬S(a), ¬U(a) @w0
            → konsistent, kein Widerspruch.
UMGANG      "Es ist möglich, dass a weder T noch U noch S erfüllt."
```

Zug 11 (Zweig 6b)

```
BRETT       Zweig 6b: ¬U(a) @w0
ZUG         A13 anwenden
SYMBOLE     A13 := □∀x (T(x) → U(x))
WARUM       Wie in Zug 9.
UMGANG      "Aus A13 folgt: Wenn a T erfüllt, dann erfüllt a U.
```

```
            Also: Entweder a erfüllt T nicht, oder a erfüllt U."
NEU         Verzweigung:
            11a: ¬T(a) @w0
            11b: U(a) @w0  ← Widerspruch zu 6b (¬U(a))
            Zweig 11b schließt (⊥).
            Wir bleiben bei 11a: ¬T(a) @w0.
```

Zug 12 (Zweig 6b, Fortsetzung)

```
BRETT       Zweig 6b: ¬U(a), ¬T(a) @w0
ZUG         A15 anwenden
SYMBOLE     A15 := □∀x (S(x) → T(x))
WARUM       Wie in Zug 8.
UMGANG      "Aus A15 folgt: Wenn a S erfüllt, dann erfüllt a T.
            Also: Entweder a erfüllt S nicht, oder a erfüllt T."
NEU         Verzweigung:
            12a: ¬S(a) @w0
            12b: T(a) @w0  ← Widerspruch zu 11a (¬T(a))
            Zweig 12b schließt (⊥).
            Wir bleiben bei 12a: ¬S(a) @w0.
```

Zug 13 (Zweig 6b, Fortsetzung)

```
BRETT       Zweig 6b: ¬U(a), ¬T(a), ¬S(a) @w0
ZUG         A14 anwenden
SYMBOLE     A14 := □∀x (U(x) → S(x))
WARUM       Wie in Zug 10.
UMGANG      "Aus A14 folgt: Wenn a U erfüllt, dann erfüllt a S.
            Also: Entweder a erfüllt U nicht, oder a erfüllt S."
NEU         Verzweigung:
            13a: ¬U(a) @w0  ← bereits in 6b
            13b: S(a) @w0  ← Widerspruch zu 12a (¬S(a))
            Zweig 13b schließt (⊥).
            Wir bleiben bei 13a: ¬U(a) @w0.
```

Ergebnis von Zweig 6b

```
BRETT       Zweig 6b: ¬U(a), ¬T(a), ¬S(a) @w0
            → konsistent, kein Widerspruch.
```

Zug 14 (Zweig 6c)

```
BRETT       Zweig 6c: ¬S(a) @w0
ZUG         A15 anwenden
SYMBOLE     A15 := □∀x (S(x) → T(x))
WARUM       Wie in Zug 8.
UMGANG      "Aus A15 folgt: Wenn a S erfüllt, dann erfüllt a T.
            Also: Entweder a erfüllt S nicht, oder a erfüllt T."
NEU         Verzweigung:
            14a: ¬S(a) @w0  ← bereits in 6c
            14b: T(a) @w0
            Beide Zweige möglich.
```

Zug 15 (Zweig 6c, Fortsetzung)

```
BRETT       Zweig 6c: ¬S(a), T(a) @w0
ZUG         A13 anwenden
SYMBOLE     A13 := □∀x (T(x) → U(x))
WARUM       Wie in Zug 9.
UMGANG      "Aus A13 folgt: Wenn a T erfüllt, dann erfüllt a U.
            Also: Entweder a erfüllt T nicht, oder a erfüllt U."
NEU         Verzweigung:
            15a: ¬T(a) @w0
            15b: U(a) @w0
```

Zug 16 (Zweig 6c, Fortsetzung)

```
BRETT       Zweig 6c: ¬S(a), T(a), U(a) @w0 (wenn 15b gewählt)
ZUG         A14 anwenden
SYMBOLE     A14 := □∀x (U(x) → S(x))
WARUM       Wie in Zug 10.
UMGANG      "Aus A14 folgt: Wenn a U erfüllt, dann erfüllt a S.
            Also: Entweder a erfüllt U nicht, oder a erfüllt S."
NEU         Verzweigung:
            16a: ¬U(a) @w0  ← Widerspruch zu 15b (U(a))
            16b: S(a) @w0  ← Widerspruch zu 6c (¬S(a))
            Beide schließen (⊥).
            Also muss 15a gelten: ¬T(a) @w0.
```

Ergebnis von Zweig 6c

```
BRETT       Zweig 6c: ¬S(a), ¬T(a), ¬U(a) @w0
            → konsistent, kein Widerspruch.
```

Endergebnis von Beweisgang A

```
BRETT       Alle drei Zweige (6a, 6b, 6c) bleiben offen.
            Kein Zweig schließt.
UMGANG      Es gibt ein S5-Modell mit einem Individuum a, für das
            ¬T(a), ¬U(a), ¬S(a) gelten.
            In diesem Modell ist die Trinität falsch.
ERGEBNIS    ¬□∀x Tr(x) ist erfüllbar.
            Also ist □∀x Tr(x) kein Theorem von S5.
FORMAL      S5 ⊮ □∀x Tr(x)
```

Zug-für-Zug: Beweisgang B — S5+SP ⊢ □∀x Tr(x)

Ziel: Zeigen, dass das Tableau für ¬□∀x Tr(x) **schließt**, wenn die Superpositionsaxiome ASP3–ASP5 hinzugefügt werden.

Die Ausgangsstellung: Wie in Beweisgang A, aber jetzt mit ASP3–ASP5.

Zug 1–5 (identisch mit Beweisgang A)

1.	¬□∀x Tr(x)	Annahme
2.	◇¬∀x Tr(x)	1, ¬□-Regel
3.	¬∀x Tr(x) @w0	2, ◇-Regel
4.	∃x ¬Tr(x) @w0	3, ¬∀-Regel
5.	¬Tr(a) @w0	4, ∃-Regel

Zug 6 — Die entscheidende Fallunterscheidung

```
BRETT       Zeile 5: ¬Tr(a) @w0
ZUG         Fallunterscheidung: w0 = w_super ∨ w0 ≠ w_super
SYMBOLE     ∨ = oder; = = gleich; ≠ = ungleich
WARUM       Jede Welt ist entweder w_super oder nicht. Das ist ein
            klassisches logisches Gesetz (tertium non datur).
UMGANG      "Entweder ist w0 die Superpositionswelt, oder sie ist es nicht."
NEU         Zwei Verzweigungen:
            A: w0 = w_super
            B: w0 ≠ w_super
```

Zug 7 (Verzweigung A)

```
BRETT       Verzweigung A: w0 = w_super
ZUG         Substitution: w0 durch w_super ersetzen
SYMBOLE     = (Identität)
WARUM       Aus w0 = w_super folgt, dass alles, was in w0 gilt, auch
            in w_super gilt.
UMGANG      "In w_super gilt: ¬Tr(a)."
NEU         Zeile 7: ¬Tr(a) @w_super
```

Zug 8 (Verzweigung A, Fortsetzung)

```
BRETT       Verzweigung A: ¬Tr(a) @w_super
ZUG         ASP3 anwenden
SYMBOLE     ASP3 := ∀x Tr(x) @w_super
            ∀-Regel: ∀x A → A[a/x]
WARUM       ASP3 ist als Formel verfügbar. Die ∀-Regel macht sie zu
            Tr(a) @w_super.
UMGANG      "In w_super gilt: a erfüllt die Trinität."
NEU         Zeile 8: Tr(a) @w_super
```

Zug 9 (Verzweigung A, Abschluss)

```
BRETT       Verzweigung A: ¬Tr(a) @w_super, Tr(a) @w_super
ZUG         Widerspruch feststellen
SYMBOLE     ⊥ = Widerspruch
WARUM       ¬Tr(a) und Tr(a) können nicht gleichzeitig gelten.
UMGANG      "Widerspruch: a erfüllt die Trinität und a erfüllt sie nicht."
NEU         ⊥ — Verzweigung A schließt.
```

Zug 10 (Verzweigung B)

```
BRETT       Verzweigung B: w0 ≠ w_super
ZUG         ASP5 anwenden
```

```
SYMBOLE     ASP5 := ∀v (v ≠ w_super → w_super R v)
            ∀-Regel: ∀v A → A[w0/v]
            →-Regel (Modus Ponens): aus A und A → B folgt B
WARUM       ASP5 ist als Formel verfügbar. Die ∀-Regel macht sie zu
            (w0 ≠ w_super → w_super R w0). Mit w0 ≠ w_super folgt
            w_super R w0 (Modus Ponens).
UMGANG      "Weil w0 nicht w_super ist, ist w0 von w_super aus erreichbar."
NEU         Zeile 10: w_super R w0
```

Zug 11 (Verzweigung B, Fortsetzung)

```
BRETT       Verzweigung B: w_super R w0
ZUG         ASP4 anwenden
SYMBOLE     ASP4 := ∀v (w_super R v → ∀x Tr(x) @v)
            ∀-Regel: ∀v A → A[w0/v]
            →-Regel (Modus Ponens): aus A und A → B folgt B
WARUM       ASP4 ist als Formel verfügbar. Die ∀-Regel macht sie zu
            (w_super R w0 → ∀x Tr(x) @w0). Mit w_super R w0 folgt
            ∀x Tr(x) @w0 (Modus Ponens).
UMGANG      "Weil w0 von w_super aus erreichbar ist, gilt in w0:
            für alle x die Trinität."
NEU         Zeile 11: ∀x Tr(x) @w0
```

Zug 12 (Verzweigung B, Abschluss)

```
BRETT       Verzweigung B: ∀x Tr(x) @w0
ZUG         ∀-Regel anwenden
SYMBOLE     ∀-Regel: ∀x A → A[a/x]
WARUM       Die Formel hat die Form ∀x A. Die ∀-Regel macht sie zu Tr(a)
@w0.
UMGANG      "In w0 gilt: a erfüllt die Trinität."
NEU         Zeile 12: Tr(a) @w0
```

Zug 13 (Verzweigung B, Abschluss)

```
BRETT       Verzweigung B: Tr(a) @w0, ¬Tr(a) @w0 (aus Zug 5)
ZUG         Widerspruch feststellen
SYMBOLE     ⊥ = Widerspruch
WARUM       Tr(a) und ¬Tr(a) können nicht gleichzeitig gelten.
UMGANG      "Widerspruch: a erfüllt die Trinität und a erfüllt sie nicht."
NEU         ⊥ — Verzweigung B schließt.
```

Endergebnis von Beweisgang B

```
BRETT       Beide Verzweigungen (A und B) schließen.
UMGANG      Die Annahme ¬□∀x Tr(x) ist unhaltbar.
ERGEBNIS    □∀x Tr(x) ist ableitbar.
FORMAL      S5+SP ⊢ □∀x Tr(x)
```

Teil III — Die metalogische Konsequenz

1. Was bleibt, was fällt

```
S5 ⊬ □∀x Tr(x)          (Beweisgang A, offenes Tableau)
S5+SP ⊢ □∀x Tr(x)        (Beweisgang B, geschlossenes Tableau)
```

Die entscheidende Formulierung:

> Die Brücke von der **Existenz** der Trinität in **einer** Welt (w_super) zur **Notwendigkeit** der Trinität in **allen** Welten ist **kein Theorem von S5**. Sie muss als **zusätzliche metaphysische Annahme** eingeführt werden — in Form der Superpositionsaxiome ASP3–ASP5.

Was das nicht bedeutet:

- Es bedeutet **nicht**, dass die Trinität falsch ist.
- Es bedeutet **nicht**, dass die Superpositionsaxiome wahr sind.
- Es bedeutet **nicht**, dass S5 unvollständig ist (S5 ist vollständig).

Was das bedeutet:

- Es bedeutet: Die Axiome A1–A15 sind zu schwach.
- Es bedeutet: Man braucht zusätzliche Annahmen.
- Es bedeutet: Diese Annahmen sind metaphysisch, nicht logisch.

2. Minimalität (Modal 6)

ASP1 ist redundant — sie folgt aus ASP2 in S5. **Beweis in Umgangssprache:** ASP2 sagt: „Bewusstsein gibt es nur in w_super." Wenn man das auf w_super selbst anwendet, folgt: Bewusstsein gibt es in w_super. Das ist ASP1.

ASP3, ASP4, ASP5 sind unverzichtbar — ohne eines von ihnen ist die Trinität nicht ableitbar. Modal 6 konstruiert für jedes der drei ein Gegenmodell.

Die minimale Teilmenge für die Trinität: {ASP3, ASP4, ASP5}. **Die minimale Teilmenge für die Superpositions-Intuition:** {ASP1, …, ASP5}.

3. Nicht-Eindeutigkeit (Modal 7)

Es gibt **mindestens vier** systematisch verschiedene Erweiterungen, die alle die Trinität ableiten:

1. **Superposition** (ASP1–ASP5).
2. **Topologie** (TOP1–TOP5) — Grenzwertaxiome.
3. **Temporalität** (T1–T4) — Zeitmodi.
4. **Mereologie** (MER1–MER5) — Teil-Ganzes-Axiome.

Die Trinität ist **axiomen-invariant**. Die Wahl der Erweiterung ist eine metaphysische, physikalische oder hermeneutische Frage — keine metalogische.

4. Topologie (Modal 8) — die L1–L7-Axiome

Das Bild: Ein Beobachter in der Mitte, Nachbarschaften als Kreise um ihn, der Horizont als Grenzwert ganz außen.

- **L1, L2:** Was am Horizont erscheint, ist mindestens möglich.
- **L3, L4:** Der Horizont erbt die logische Struktur.
- **L5, L6:** Was am Horizont erscheint, erscheint auch in den Kreisen.
- **L7:** Was in den Kreisen erscheint, erscheint auch beim Beobachter.

Formal: L1–L7 regeln den Operator L (L_inf, L_sup). Mit ihnen gilt: S5+SP+L $\vdash \Box\forall x\, Tr(x)$. Die topologische Erweiterung fügt **keine neuen metaphysischen Annahmen** hinzu — sie präzisiert nur die Sprache.

Nachwort

Sie haben diese Datei gelesen. Sie haben den Beweisgang Zug für Zug verfolgt, mit Symbolerklärung bei jedem Schritt und Umgangssprache bei jeder Aussage. Vielleicht können Sie den Beweisgang jetzt **verstehen**, auch wenn Sie ihn nicht **selbst führen** könnten. Das ist das Ziel dieser Datei.

Was bleibt, ist die Einsicht: Die Trinität folgt nicht aus S5 allein. Sie folgt aus S5 plus Superpositionsaxiome. Die Brücke von Existenz zu Notwendigkeit ist kein Theorem von S5 — sie ist eine metaphysische Annahme.

Die weiteren Themen (Modal 8 vollständig, Modal 9–17) werden in derselben Form als md-Dateien geliefert.

Diese Datei wurde im Geiste strenger Modallogik verfasst, jedoch in der Sprache eines Schachjournalisten — denn der Beweisgang bedarf beider: der Präzision der Formel und der Anschaulichkeit des Zuges.

```
```