

Die Minimalität der Superpositions-Axiome

Eine metalogische Untersuchung zur Unabhängigkeit von ASP1–ASP5

Eine metalogische Untersuchung zur Unabhängigkeit von ASP1–ASP5

Paul Koop

Zusammenfassung

In modal5.md wurde gezeigt: Aus den Basisaxiomen A1, A4, A11, A12, A13, A14, A15 folgt die Trinitätsformel in reinem S5 nicht. Die Erweiterung durch die Superpositions-Axiome ASP1–ASP5 ist hinreichend. Offen blieb die Frage, ob sie auch minimal ist. Die vorliegende Abhandlung beantwortet diese Frage. Sie zeigt: ASP1 ist aus ASP2 in S5 ableitbar und damit redundant. Die minimale Teilmenge für die Ableitung der Trinitätsformel ist {ASP3, ASP4, ASP5}. Die volle Axiomatik ist minimal für die Superpositions-Intuition, nicht für die Zielaussage allein. Der Begriff der Minimalität erweist sich damit als relativ: Er hängt ab von dem, was abgeleitet werden soll, und von der Intuition, die formalisiert werden soll.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort: Was diese Abhandlung ist – und was sie nicht ist	3
Einleitung: Drei Formen der Minimalität	3
Redundanz	3
Unabhängigkeit	4
Semantische Unverzichtbarkeit (hinreichende Minimalität)	4
Was diese Abhandlung zeigt	4
Die methodische Selbstbeschränkung	4
Formale Sprache und logischer Rahmen	5
Modallogik S5	5
Prädikatenlogik	5
Modelle	5
Die Basisaxiome (Wiederholung aus modal5.md)	6
A1 – Monismus	6
A4 – Existenz einer möglichen Wirklichkeit	6
A11 – Transzendente Brücke	6
A12 – Erfahrbarkeit und Realisierung	6
A13, A14, A15 – Die drei Implikationen der Fälle	6
Definition der Grenzwertstruktur	6
Die Superpositions-Axiome (Wiederholung aus modal5.md)	6

ASP1 – Bewusstsein in der Superposition	6
ASP2 – Einzigartigkeit von C	6
ASP3 – Die Superposition enthält alle Tr-Eigenschaften	7
ASP4 – Übertragung auf alle Welten	7
ASP5 – Universelle Erreichbarkeit	7
Die Beweisstrategie	7
Ziel	7
Konstruktionsprinzip	7
Ein erstes Ergebnis: ASP2 impliziert ASP1 in S5	7
Konsequenz für die Strategie	7
Teil A: Minimale Teilmenge für die Zielaussage	8
Satz A1: $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$ ist hinreichend	8
Satz A2: Keine echte Teilmenge von $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$ ist hinreichend	8
Gegenmodell für $\{ASP4, ASP5\}$ (ohne ASP3)	8
Gegenmodell für $\{ASP3, ASP5\}$ (ohne ASP4)	8
Gegenmodell für $\{ASP3, ASP4\}$ (ohne ASP5)	9
Satz A3: $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$ ist minimal	9
Teil B: Rolle von ASP1 und ASP2	9
ASP1 und ASP2 sind nicht notwendig für die Zielaussage	9
ASP2 impliziert ASP1 in S5	9
Konsequenz: ASP1 ist redundant	10
Rolle von ASP1 und ASP2 für die Superpositions-Intuition	10
Teil C: Die Abhängigkeitsstruktur der Superpositions-Axiome	10
Die Struktur in einer Tabelle	10
Die Abhängigkeitsstruktur in einem Diagramm	11
Interpretation	11
Teil D: Konsequenzen für modal5.md	11
Die Axiomatik in modal5.md ist nicht minimal für die Zielaussage	11
Die metalogische Bedeutung	11
Offene Fragen	11
Teil E: Was nicht gezeigt wurde	12
Keine Aussage über andere Erweiterungen	12
Keine Aussage über die Wahrheit der Axiome	12
Keine Aussage über Minimalität in einem absoluten Sinn	12
Wir stehen am Anfang der Unendlichkeit	12
Schluss: Was wurde gezeigt?	12
Anhang A: Die formale Struktur in einer Übersicht	13
Axiome (vollständig)	13
Definitionen	13
Abgeleitete Theoreme	14

Anhang B: Die Gegenmodelle in einer Übersicht	14
Anhang C: Die Rolle von ASP1 und ASP2 in einer Übersicht	14
Nachwort	14

Vergangenheit und Zukunft sind Horizonte des Wissens.

Die Gegenwart ist der Ort der Wirklichkeit.

Nichts, was war, geht verloren.

Vorwort: Was diese Abhandlung ist – und was sie nicht ist

Diese Abhandlung verfolgt ausdrücklich nicht das Ziel, die Wahrheit einer metaphysischen oder theologischen Aussage zu beweisen.

Sie untersucht die **logische Struktur einer Axiomatik**. In `modal5.md` wurde gezeigt: Aus den Basisaxiomen A1, A4, A11, A12, A13, A14, A15 folgt die Trinitätsformel $\Box\forall x Tr(x)$ in reinem S5 **nicht**. Die Erweiterung durch die Superpositions-Axiome ASP1–ASP5 ist **hinreichend**. Offen blieb die Frage: Ist sie auch **minimal**? Ist jedes der fünf Axiome unverzichtbar?

Die vorliegende Untersuchung beantwortet diese Frage. Sie zeigt: Die Superpositions-Axiome sind **nicht alle unverzichtbar**. ASP1 ist aus ASP2 ableitbar. Die minimale Teilmenge für die Ableitung der Trinitätsformel ist $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$.

Die Untersuchung ist daher **metalogisch**: Sie bestimmt die **Abhängigkeitsstruktur** einer hinreichenden Axiomatik. Sie zeigt nicht, dass diese Axiomatik die einzig mögliche ist – andere Erweiterungen könnten ebenfalls hinreichend sein. Sie zeigt nur: **Innerhalb der in `modal5.md` gewählten Erweiterung ist die Abhängigkeitsstruktur so, wie sie ist.**

Die zentrale Aussage dieser Abhandlung lautet:

Für die Ableitung der Trinitätsformel $\Box\forall x Tr(x)$ ist die minimale Teilmenge der Superpositions-Axiome $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$. ASP1 ist aus ASP2 ableitbar. ASP2 ist für die Zielaussage nicht notwendig, aber für die Superpositions-Intuition wesentlich.

Wir stehen am Anfang der Unendlichkeit. Andere Axiomatisierungen sind möglich. Was diese Abhandlung leistet, ist eine **Landkarte der Abhängigkeiten** innerhalb der in `modal5.md` vorgeschlagenen Struktur.

Einleitung: Drei Formen der Minimalität

Der Begriff „Minimalität“ ist mehrdeutig. Bevor wir die eigentliche Untersuchung beginnen, müssen wir präzise unterscheiden.

Redundanz

Eine Axiomenmenge Σ ist **redundant**, wenn es ein Axiom $\varphi \in \Sigma$ gibt, das aus $\Sigma \setminus \{\varphi\}$ ableitbar ist:

$$\Sigma \setminus \{\varphi\} \vdash \varphi$$

Redundanz ist ein **Defekt**: Das redundante Axiom trägt nichts zur Ableitungsstärke bei und kann entfernt werden, ohne die Theorie zu schwächen.

Unabhängigkeit

Eine Axiomenmenge Σ ist **unabhängig**, wenn für **kein** Axiom $\varphi \in \Sigma$ gilt:

$$\Sigma \setminus \{\varphi\} \vdash \varphi$$

Unabhängigkeit ist die **stärkere** Eigenschaft: Kein Axiom ist aus den übrigen ableitbar.

Wichtig: Unabhängigkeit ist **nicht** dasselbe wie Minimalität im Sinne der Mächtigkeit. Eine unabhängige Axiomenmenge kann größer sein als nötig, wenn eine andere, kleinere Axiomenmenge dieselbe Theorie erzeugt. Unabhängigkeit ist eine **interne** Eigenschaft einer gegebenen Axiomenmenge.

Semantische Unverzichtbarkeit (hinreichende Minimalität)

Eine Axiomenmenge Σ ist **semantisch unverzichtbar** (oder **hinreichend minimal**) für eine Zielaussage φ , wenn gilt:

1. $\Sigma \vdash \varphi$ (Hinlänglichkeit).
2. Für jede echte Teilmenge $\Sigma' \subsetneq \Sigma$ gilt: $\Sigma' \not\vdash \varphi$ (Unverzichtbarkeit).

Diese Eigenschaft ist stärker als Unabhängigkeit. Sie bezieht sich nicht auf die Ableitbarkeit einzelner Axiome aus den übrigen, sondern auf die **Ableitbarkeit der Zielaussage** aus Teilmengen.

Was diese Abhandlung zeigt

Wir zeigen die **dritte** Form: die **semantische Unverzichtbarkeit** der Superpositions-Axiome für die Trinitätsformel.

Genauer: Wir konstruieren für jedes relevante Axiom ein S5-Modell, das die übrigen Axiome erfüllt, in dem aber $\neg \Box \forall x Tr(x)$ gilt.

Die Existenz dieser Modelle zeigt: Die betroffenen Axiome sind für die Ableitung von $\Box \forall x Tr(x)$ unverzichtbar – jedenfalls innerhalb der in `modal5.md` gewählten Axiomatik.

Die methodische Selbstbeschränkung

Wir zeigen **nicht**:

- dass die Superpositions-Axiome wahr sind,
- dass es keine andere hinreichende Erweiterung gibt,
- dass es keine andere minimale Teilmenge von ASP1–ASP5 gibt (falls man die Axiome anders formuliert).

Wir zeigen **nur**: In der in `modal5.md` gewählten Fassung ist die Abhängigkeitsstruktur so, wie sie ist. Das ist ein **Unabhängigkeitsresultat** im Sinne der metalogischen Tradition.

Formale Sprache und logischer Rahmen

Modallogik S5

Wir arbeiten in der Modallogik erster Stufe mit Identität im System S5:

- **Notwendigkeit:** $\Box p$
- **Möglichkeit:** $\Diamond p := \neg \Box \neg p$

Axiome von S5:

- (K) $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- (T) $\Box p \rightarrow p$
- (4) $\Box p \rightarrow \Box \Box p$
- (5) $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$

Inferenzregeln:

- **Modus Ponens:** Aus p und $p \rightarrow q$ folgt q .
- **Necessitation:** Aus p (ableitbar) folgt $\Box p$.

Tableau-Regeln für S5:

$(\neg \Box)$	$\frac{\neg \Box A}{\Diamond \neg A}$
$(\Diamond)$	$\frac{\Diamond A}{A@w_{\text{neu}}} \quad (\text{neue Welt})$
$(\Box)$	$\frac{\Box A@w}{A@v} \quad \text{für jede bereits existierende Welt } v$
$(\neg \forall)$	$\frac{\neg \forall x A}{\exists x \neg A}$
$(\exists)$	$\frac{\exists x A}{A[a/x]} \quad (\text{a neu})$
$(\forall)$	$\frac{\forall x A}{A[a/x]} \quad (\text{a beliebig})$

Prädikatenlogik

Wir verwenden die klassische Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität (=) und den üblichen Quantoren ($\forall, \exists$).

Modelle

Ein **S5-Modell** ist ein Tupel $\mathcal{M} = (W, R, I)$ mit:

- W : eine nicht-leere Menge von Welten.
- $R \subseteq W \times W$: eine **Äquivalenzrelation** (S5-Rahmen).
- I : eine Interpretationsfunktion.

Ein **S5+SP-Modell** ist ein S5-Modell, das zusätzlich die Superpositions-Axiome ASP1–ASP5 erfüllt.

Die Basisaxiome (Wiederholung aus modal5.md)

Wir wiederholen die Basisaxiome, um die Abhandlung selbstständig lesbar zu machen.

A1 – Monismus

$$A1 := \Box \neg \exists x \exists y \text{FundamentalGetrennt}(x, y)$$

A4 – Existenz einer möglichen Wirklichkeit

$$A4 := \Diamond \exists w \text{Welt}(w)$$

A11 – Transzendente Brücke

$$A11 := \forall w (\text{WeltGetrenntVonBewusstsein}(w) \leftrightarrow \neg \exists c (\text{Bewusstsein}(c) \wedge c(w)))$$

A12 – Erfahrbarkeit und Realisierung

$$A12 := \forall p. \text{Erfahrbar}(p) \leftrightarrow \exists w. \text{Realisiert}(w, p)$$

A13, A14, A15 – Die drei Implikationen der Fälle

$$A13 := \Box \forall x (T(x) \rightarrow U(x))$$

$$A14 := \Box \forall x (U(x) \rightarrow S(x))$$

$$A15 := \Box \forall x (S(x) \rightarrow T(x))$$

Definition der Grenzwertstruktur

$$T := \{x \mid U < x < S\}$$

$$U := \lim_{x \rightarrow \inf} T$$

$$S := \lim_{x \rightarrow \sup} T$$

$$Tr := U \wedge T \wedge S$$

Die Superpositions-Axiome (Wiederholung aus modal5.md)

ASP1 – Bewusstsein in der Superposition

$$ASP1 := C @ w_{\text{super}}$$

ASP2 – Einzigartigkeit von C

$$ASP2 := \forall v (w_{\text{super}} R v \rightarrow (C @ v \leftrightarrow v = w_{\text{super}}))$$

ASP3 – Die Superposition enthält alle Tr-Eigenschaften

$$ASP3 := \forall x Tr(x)@w_{\text{super}}$$

ASP4 – Übertragung auf alle Welten

$$ASP4 := \forall v (w_{\text{super}} Rv \rightarrow \forall x Tr(x)@v)$$

ASP5 – Universelle Erreichbarkeit

$$ASP5 := \forall v (v \neq w_{\text{super}} \rightarrow w_{\text{super}} Rv)$$

Die Beweisstrategie

Ziel

Wir wollen zeigen: Für bestimmte Axiome der Superpositions-Erweiterung existiert ein S5-Modell $\mathcal{M}$, das die übrigen Axiome erfüllt, in dem aber $\neg \Box \forall x Tr(x)$ gilt.

Konstruktionsprinzip

Jedes Modell verletzt **genau eine** der Superpositions-Eigenschaften. Alle anderen Superpositions-Eigenschaften bleiben erfüllt. Die Verletzung reicht aus, um die Notwendigkeit der Trinitätsformel zu unterlaufen.

Wichtige Vorüberlegung: Damit $\neg \Box \forall x Tr(x)$ in $\mathcal{M}$ gilt, genügt es, eine Welt w^* zu konstruieren, in der $\neg \forall x Tr(x)$ gilt – d. h. in der es ein Individuum a gibt mit $\neg T(a) \vee \neg U(a) \vee \neg S(a)$.

Ein erstes Ergebnis: ASP2 impliziert ASP1 in S5

Aus ASP2 folgt durch Instanziierung $v := w_{\text{super}}$:

$$w_{\text{super}} R w_{\text{super}} \rightarrow (C@w_{\text{super}} \leftrightarrow w_{\text{super}} = w_{\text{super}})$$

In S5 gilt Reflexivität: $w_{\text{super}} R w_{\text{super}}$. Und Identität: $w_{\text{super}} = w_{\text{super}}$. Also:

$$C@w_{\text{super}}$$

Das ist ASP1. **ASP1 ist damit aus ASP2 ableitbar.** In der vollen Axiomatik ist ASP1 **redundant**.

Konsequenz für die Strategie

Die Strategie „ein Modell, das genau ein Axiom verletzt“ ist **nicht** für alle Paare durchführbar. Für ASP1 und ASP2 gilt: ASP2 impliziert ASP1 in S5. Also ist ASP1 **redundant**.

Präzisiertes Ziel: Wir zeigen die **Unverzichtbarkeit von ASP3, ASP4, ASP5** für die Ableitung der Trinitätsformel. Für ASP1 zeigen wir, dass es in der Fassung von `modal5.md` **redundant** ist. Für ASP2 zeigen wir, dass es für die Zielaussage nicht notwendig, aber für die Superpositions-Intuition wesentlich ist.

Teil A: Minimale Teilmenge für die Zielaussage

Satz A1: $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$ ist hinreichend

Satz: In S5 gilt:

$$\{ASP3, ASP4, ASP5\} \vdash \Box \forall x Tr(x)$$

Beweis: Sei $\mathcal{M} = (W, R, I)$ ein S5-Modell mit ASP3, ASP4, ASP5. Sei $w \in W$ beliebig.

- **Fall 1:** $w = w_{\text{super}}$. Nach ASP3: $\mathcal{M}, w \models \forall x Tr(x)$.
- **Fall 2:** $w \neq w_{\text{super}}$. Nach ASP5: $w_{\text{super}} R w$. Nach ASP4: $\mathcal{M}, w \models \forall x Tr(x)$.

In beiden Fällen gilt $\mathcal{M}, w \models \forall x Tr(x)$. Da w beliebig war:

$$\mathcal{M} \models \Box \forall x Tr(x)$$

q.e.d.

Satz A2: Keine echte Teilmenge von $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$ ist hinreichend

Wir zeigen drei Gegenmodelle.

Gegenmodell für $\{ASP4, ASP5\}$ (ohne ASP3)

Sei $\mathcal{M}_3 = (W, R, I)$ mit:

- $W = \{w_{\text{super}}, w^*\}$
- $R = W \times W$ (universell)
- I :
 - $Tr(x)@w_{\text{super}}$: falsch für ein Individuum a .
 - $Tr(x)@w^*$: wahr für alle x .

Prüfung:

- ASP4 erfüllt: Für alle v mit $w_{\text{super}} R v$ gilt $\forall x Tr(x)@v$. In w^* gilt $\forall x Tr(x)$, also ist ASP4 erfüllt.
- ASP5 erfüllt: Für alle $v \neq w_{\text{super}}$ gilt $w_{\text{super}} R v$.
- ASP3 verletzt: $\neg Tr(a)@w_{\text{super}}$.
- **Zielaussage:** In w_{super} gilt $\neg Tr(a)$, also $\neg \forall x Tr(x)$. Damit gilt $\neg \Box \forall x Tr(x)$.

Damit ist ASP3 unverzichtbar.

Gegenmodell für $\{ASP3, ASP5\}$ (ohne ASP4)

Sei $\mathcal{M}_4 = (W, R, I)$ mit:

- $W = \{w_{\text{super}}, w_1\}$
- $R = W \times W$ (universell)
- I :
 - $Tr(x)@w_{\text{super}}$: wahr für alle x .
 - $Tr(x)@w_1$: falsch für a .

Prüfung:

- ASP3 erfüllt: $\forall x Tr(x)@w_{\text{super}}$.
- ASP4 verletzt: $w_{\text{super}}Rw_1$, aber $\neg Tr(a)@w_1$.
- ASP5 erfüllt: Für alle $v \neq w_{\text{super}}$ (d. h. für $v = w_1$) gilt $w_{\text{super}}Rw_1$.
- **Zielaussage:** In w_1 gilt $\neg Tr(a)$, also $\neg \forall x Tr(x)$. Damit gilt $\neg \Box \forall x Tr(x)$.

Damit ist ASP4 unverzichtbar.

Gegenmodell für $\{ASP3, ASP4\}$ (ohne ASP5)

Sei $\mathcal{M}_5 = (W, R, I)$ mit:

- $W = \{w_{\text{super}}, w_1\}$
- $R = \{(w_{\text{super}}, w_{\text{super}}), (w_1, w_1)\}$ (zwei isolierte Welten)
- I :
 - $Tr(x)@w_{\text{super}}$: wahr für alle x .
 - $Tr(x)@w_1$: falsch für a .

Prüfung:

- ASP3 erfüllt: $\forall x Tr(x)@w_{\text{super}}$.
- ASP4 erfüllt: Die einzige Welt v mit $w_{\text{super}}Rv$ ist w_{super} selbst, und dort gilt $\forall x Tr(x)$.
- ASP5 verletzt: $w_1 \neq w_{\text{super}}$, aber $w_{\text{super}}Rw_1$ gilt nicht.
- **Zielaussage:** In w_1 gilt $\neg Tr(a)$, also $\neg \forall x Tr(x)$. Damit gilt $\neg \Box \forall x Tr(x)$.

Damit ist ASP5 unverzichtbar.

Satz A3: $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$ ist minimal

Satz: Die Menge $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$ ist eine minimale Teilmenge von $\{ASP1, \dots, ASP5\}$, die $\Box \forall x Tr(x)$ ableitet.

Beweis: Aus Satz A1 folgt die Hinlänglichkeit. Aus Satz A2 folgt die Unverzichtbarkeit jedes der drei Axiome: Keine echte Teilmenge von $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$ leitet $\Box \forall x Tr(x)$ ab. Also ist die Menge minimal. q.e.d.

Teil B: Rolle von ASP1 und ASP2

ASP1 und ASP2 sind nicht notwendig für die Zielaussage

Satz B1: $\{ASP3, ASP4, ASP5\} \vdash \Box \forall x Tr(x)$, also sind ASP1 und ASP2 für die Zielaussage nicht erforderlich.

Beweis: Direkt aus Satz A1. q.e.d.

ASP2 impliziert ASP1 in S5

Satz B2: In S5 gilt:

$$\{ASP2, \text{Reflexivität}\} \vdash ASP1$$

Beweis: Aus ASP2 durch Instanziierung $v := w_{\text{super}}$:

$$w_{\text{super}} R w_{\text{super}} \rightarrow (C @ w_{\text{super}} \leftrightarrow w_{\text{super}} = w_{\text{super}})$$

In S5 gilt Reflexivität: $w_{\text{super}} R w_{\text{super}}$. Und Identität: $w_{\text{super}} = w_{\text{super}}$. Also:

$$C @ w_{\text{super}}$$

Das ist ASP1. q.e.d.

Konsequenz: ASP1 ist redundant

Satz B3: In S5 ist ASP1 aus ASP2 ableitbar. Damit ist ASP1 in der vollen Axiomatik $\{ASP1, \dots, ASP5\}$ redundant.

Beweis: Direkt aus Satz B2. q.e.d.

Rolle von ASP1 und ASP2 für die Superpositions-Intuition

Satz B4: ASP1 und ASP2 sind nicht redundant für die **Superpositions-Intuition**, auch wenn sie für die Zielaussage $\Box \forall x Tr(x)$ nicht benötigt werden.

Begründung: Die Superpositions-Intuition besagt, dass Bewusstsein (C) der selbstreflexive Moment der Superposition ist. Diese Intuition wird durch ASP1 und ASP2 formalisiert:

- ASP1: C gilt in der Superposition.
- ASP2: C gilt **nur** in der Superposition.

Ohne ASP1 und ASP2 wäre die Superpositions-Intuition nicht vollständig formalisiert. Die Axiome ASP3–ASP5 allein sagen nichts über C .

Fazit: Es gibt zwei Ebenen der Minimalität:

1. **Minimalität für die Zielaussage:** $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$ ist minimal.
2. **Minimalität für die Superpositions-Intuition:** $\{ASP1, \dots, ASP5\}$ ist minimal (bis auf die Redundanz von ASP1).

Teil C: Die Abhängigkeitsstruktur der Superpositions-Axiome

Die Struktur in einer Tabelle

Axiom	Funktion	Für Zielaussage nötig?	Aus anderen ableitbar?
ASP1	C in w_{super}	Nein	Ja (aus ASP2)
ASP2	C nur in w_{super}	Nein	Nein
ASP3	Tr in w_{super}	Ja	Nein
ASP4	Tr in allen erreichbaren Welten	Ja	Nein
ASP5	Universelle Erreichbarkeit	Ja	Nein

Die Abhängigkeitsstruktur in einem Diagramm

$ASP1 \leftarrow ASP2$ (ASP2 impliziert ASP1) / / / / [nicht für Zielaussage nötig]

$ASP3 \rightarrow x \text{ Tr}(x)$ (zusammen hinreichend) $ASP4 \quad ASP5$

text

Interpretation

Die Abhängigkeitsstruktur zeigt:

- **ASP2 ist unabhängig** und **stärker** als ASP1: Es impliziert ASP1.
- **ASP1 ist redundant** in der vollen Axiomatik, aber nützlich für die Klarheit der Intuition.
- **ASP3, ASP4, ASP5** bilden eine **minimale hinreichende Teilmenge** für die Zielaussage.
- **ASP3, ASP4, ASP5** sind **untereinander unabhängig**.

Teil D: Konsequenzen für modal5.md

Die Axiomatik in modal5.md ist nicht minimal für die Zielaussage

Konsequenz D1: Die Superpositions-Axiome in modal5.md enthalten redundante Elemente (ASP1) und für die Zielaussage nicht benötigte Elemente (ASP1, ASP2).

Konsequenz D2: Wenn das Ziel nur die Ableitung von $\Box \forall x \text{Tr}(x)$ ist, dann ist die minimale Erweiterung $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$.

Konsequenz D3: Wenn das Ziel die vollständige Formalisierung der Superpositions-Intuition ist, dann ist die Erweiterung $\{ASP1, \dots, ASP5\}$ angemessen, mit der Redundanz von ASP1.

Die metalogische Bedeutung

Konsequenz D4: Die Unterscheidung zwischen „Minimalität für ein Ziel“ und „Minimalität für eine Intuition“ ist **zentral** für die metalogische Analyse. Eine Axiomatik kann minimal für ein Ziel und nicht-minimal für eine Intuition sein – und umgekehrt.

Konsequenz D5: Die Analyse zeigt, dass die **Wahl der Axiome** nicht nur von der Zielaussage abhängt, sondern auch von der **Intuition**, die formalisiert werden soll. Die Superpositions-Intuition erfordert ASP1 und ASP2, auch wenn diese für die Zielaussage nicht nötig sind.

Offene Fragen

Frage D6: Gibt es eine andere Formulierung der Superpositions-Intuition, in der ASP1 und ASP2 **unverzichtbar** sind?

Frage D7: Ist die Trennung zwischen ASP1/ASP2 (Bewusstsein) und ASP3/ASP4/ASP5 (Tr) **systematisch** oder zufällig?

Frage D8: Könnte man die Superpositions-Intuition **anders** formalisieren, sodass die Zielaussage aus einer **kleineren** Axiomatik folgt?

Teil E: Was nicht gezeigt wurde

Keine Aussage über andere Erweiterungen

Diese Abhandlung hat **nicht** gezeigt, dass die Superpositions-Axiome die **einzig** hinreichende Erweiterung sind. Andere Erweiterungen von S5 könnten ebenfalls hinreichend sein, mit anderen Abhängigkeitsstrukturen.

Konsequenz E1: Die Nicht-Eindeutigkeit der Erweiterung ist Gegenstand von **Modal 7**.

Keine Aussage über die Wahrheit der Axiome

Diese Abhandlung hat **nicht** gezeigt, dass die Superpositions-Axiome **wahr** sind. Sie hat nur gezeigt, dass sie **unabhängig** (im eingeschränkten Sinn) sind.

Konsequenz E2: Die Frage der Wahrheit der Axiome ist **nicht** eine metalogische Frage. Sie ist Sache der Metaphysik, der Physik oder der Hermeneutik.

Keine Aussage über Minimalität in einem absoluten Sinn

Diese Abhandlung hat **nicht** gezeigt, dass die Superpositions-Axiome in einem absoluten Sinn minimal sind. Sie hat nur gezeigt, dass sie relativ zu einer Zielaussage oder einer Intuition minimal sind.

Konsequenz E3: Der Begriff „Minimalität“ ist **relativ**. Er hängt ab von dem, was abgeleitet werden soll.

Wir stehen am Anfang der Unendlichkeit

Diese Abhandlung hat **einen** Aspekt der Abhängigkeitsstruktur der Superpositions-Axiome geklärt. Sie hat **nicht** die Frage beantwortet, ob diese Axiome die richtige Wahl sind, um die Trinitätsstruktur zu formalisieren. Sie hat **nicht** die Frage beantwortet, ob die Trinitätsstruktur überhaupt existiert. Sie hat nur gezeigt: **Innerhalb der in modal5.md gewählten Axiomatik ist die Abhängigkeitsstruktur so und so.**

Schluss: Was wurde gezeigt?

Die vorliegende Untersuchung hat gezeigt:

1. **ASP2 impliziert ASP1 in S5.** ASP1 ist in der vollen Axiomatik redundant.
2. **Die minimale Teilmenge für die Zielaussage $\Box\forall x Tr(x)$ ist $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$.** ASP1 und ASP2 sind für die Zielaussage nicht notwendig.
3. **ASP3, ASP4 und ASP5 sind untereinander unabhängig.** Keines ist aus den anderen ableitbar.
4. **Die volle Axiomatik $\{ASP1, \dots, ASP5\}$ ist minimal für die Superpositions-Intuition,** nicht für die Zielaussage allein.
5. **Der Begriff der Minimalität ist relativ.** Er hängt ab von dem, was abgeleitet werden soll, und von der Intuition, die formalisiert werden soll.

Die zentrale Aussage dieser Abhandlung lautet:

Die Superpositions-Axiome in der Fassung von `modal5.md` sind nicht alle unverzichtbar für die Ableitung der Trinitätsformel. Die minimale Teilmenge für diese Ableitung ist $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$. **ASP1** ist aus **ASP2** ableitbar. Die volle Axiomatik ist minimal für die Superpositions-Intuition, nicht für die Zielaussage.

Die Abhandlung ist damit eine **Präzisierung** von `modal5.md`. Sie zeigt, welche Axiome welche Rolle spielen, und sie unterscheidet strikt zwischen:

- Minimalität für die Zielaussage.
- Minimalität für die Superpositions-Intuition.

Die Frage, ob die Superpositions-Axiome die richtige Wahl sind, um die Trinitätsstruktur zu formalisieren, bleibt offen. Sie ist Gegenstand von **Modal 7** (Nicht-Eindeutigkeit).

Anhang A: Die formale Struktur in einer Übersicht

Axiome (vollständig)

$$\begin{aligned}
A1 &:= \Box \neg \exists x \exists y \text{ FundamentalGetrennt}(x, y) \\
A4 &:= \Diamond \exists w \text{ Welt}(w) \\
A11 &:= \forall w (\text{WeltGetrenntVonBewusstsein}(w) \leftrightarrow \neg \exists c (\text{Bewusstsein}(c) \wedge c(w))) \\
A12 &:= \forall p (\text{Erfahrbar}(p) \leftrightarrow \exists w. \text{Realisiert}(w, p)) \\
A13 &:= \Box \forall x (T(x) \rightarrow U(x)) \\
A14 &:= \Box \forall x (U(x) \rightarrow S(x)) \\
A15 &:= \Box \forall x (S(x) \rightarrow T(x)) \\
ASP1 &:= C @ w_{\text{super}} \\
ASP2 &:= \forall v (w_{\text{super}} R v \rightarrow (C @ v \leftrightarrow v = w_{\text{super}})) \\
ASP3 &:= \forall x \text{ Tr}(x) @ w_{\text{super}} \\
ASP4 &:= \forall v (w_{\text{super}} R v \rightarrow \forall x \text{ Tr}(x) @ v) \\
ASP5 &:= \forall v (v \neq w_{\text{super}} \rightarrow w_{\text{super}} R v)
\end{aligned}$$

Definitionen

$$\begin{aligned}
\text{WeltGetrenntVonBewusstsein}(w) &:= \neg \exists c (\text{Bewusstsein}(c) \wedge c(w)) \\
\text{Erfahrbar}(p) &:= \exists w. (\text{Bewusstsein}(w) \wedge \text{Realisiert}(w, p)) \\
T &:= \{x \mid U < x < S\} \\
U &:= \lim_{x \rightarrow \inf} T \\
S &:= \lim_{x \rightarrow \sup} T \\
\text{Tr} &:= U \wedge T \wedge S
\end{aligned}$$

Abgeleitete Theoreme

- $\{ASP2\} \vdash ASP1$ (in S5)
- $\{ASP3, ASP4, ASP5\} \vdash \Box \forall x Tr(x)$
- $\{ASP1, \dots, ASP5\} \vdash \Box \forall x Tr(x)$
- $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$ ist minimal für $\Box \forall x Tr(x)$
- $\{ASP1, \dots, ASP5\}$ ist minimal für die Superpositions-Intuition

Anhang B: Die Gegenmodelle in einer Übersicht

Modell	W	R	ASP1	ASP2	ASP3	ASP4	ASP5	Zielaussage
$\mathcal{M}_3$	$\{w_{\text{super}}, w^*\}$	universell						
$\mathcal{M}_4$	$\{w_{\text{super}}, w_1\}$	universell						
$\mathcal{M}_5$	$\{w_{\text{super}}, w_1\}$	zwei isolierte Klassen						

Erläuterung: Die Tabelle zeigt drei Modelle, die jeweils die volle Axiomatik außer einem Axiom erfüllen, und in denen die Zielaussage $\Box \forall x Tr(x)$ **nicht** gilt. Damit ist jedes der drei Axiome ASP3, ASP4, ASP5 unverzichtbar.

Anhang C: Die Rolle von ASP1 und ASP2 in einer Übersicht

Axiom	Funktion	Für Zielaussage nötig?	Redundant?
ASP1	C in w_{super}	Nein	Ja (aus ASP2)
ASP2	C nur in w_{super}	Nein	Nein

Erläuterung: ASP1 und ASP2 formalisieren die Rolle von Bewusstsein in der Superposition. Sie sind für die Zielaussage $\Box \forall x Tr(x)$ nicht notwendig, aber sie sind für die Superpositions-Intuition wesentlich.

Nachwort

Sie haben diese Abhandlung gelesen. Vielleicht ist Ihnen die formale Sprache fremd geblieben, vielleicht haben Sie sie als klärend empfunden. Beides ist in Ordnung. Denn dieser Text will keine letzte Wahrheit verkünden, sondern eine Denkbewegung nachvollziehbar machen.

Die Untersuchung hat gezeigt: Die Minimalitätsfrage ist **relativ**. Sie hängt ab von dem, was abgeleitet werden soll. Bezogen auf die Trinitätsformel ist die minimale Axiomatik $\{ASP3, ASP4, ASP5\}$. Bezogen auf die Superpositions-Intuition ist die minimale Axiomatik $\{ASP1, \dots, ASP5\}$, mit der Redundanz von ASP1.

Diese Relativität ist **kein Mangel**. Sie ist eine **Einsicht**: Der Begriff der Minimalität ist nicht absolut. Er ist abhängig von Ziel und Intuition.

Was bleibt, ist die Einsicht, dass die Trinitätsstruktur **nicht** aus dem Monismus allein folgt – sie braucht zusätzliche Struktur. Die Superpositions-Axiome sind **eine** solche Struktur. Ob sie die richtige ist, bleibt offen.

Eine letzte Frage:

Wagen wir den Sprung in die Offenheit für den Grenzwert – auch wenn der Grenzwert selbst nicht formal erreichbar ist?

Diese Abhandlung wurde im Geiste strenger Modallogik verfasst, jedoch in der Sprache der Philosophie – denn die Wahrheit bedarf beider: der Präzision der Formel und der Weite des Begriffs.