Die Minimalität der Superpositionsaxiome

Modal 6 — im Stil eines Schachjournalisten erklärt

Paul Koop

Vorbemerkung: Wie diese Datei zu lesen ist

Diese Datei erklärt **Modal 6**: die Frage, welche der fünf Superpositionsaxiome ASP1–ASP5 für die Ableitung der Trinität wirklich nötig sind — und welche redundant sind.

Sie ist im **selben Stil** wie die vorigen Dateien geschrieben: Zug für Zug, mit Symbolerklärung bei jedem Schritt, mit Umgangssprache bei jeder Aussage.

Was vorausgesetzt wird: Die ersten Dateien **Modal 5** sollten gelesen sein. Insbesondere werden die Tableau-Regeln und die Superpositionsaxiome ASP1–ASP5 als bekannt vorausgesetzt.

Was diese Datei leistet: Sie zeigt zwei Dinge:

1. **ASP1 ist redundant** — sie folgt aus ASP2 in S5. (Das ist ein Ableitungsbeweis.)
2. **ASP3, ASP4, ASP5 sind unverzichtbar** — für jedes der drei gibt es ein Gegenmodell, in dem die anderen Axiome gelten, das jeweilige Axiom aber verletzt ist, und in dem die Trinität falsch ist. (Das sind drei Gegenmodell-Konstruktionen.)

Am Ende steht die **Relativität der Minimalität**: Es gibt zwei minimale Teilmengen — eine für die Zielaussage, eine für die Superpositions-Intuition.

Teil I — Die Frage

1. Was heißt „minimal"?

Eine Axiomenmenge ist **minimal für eine Zielaussage**, wenn gilt:

```
(1)  Sie leitet die Zielaussage ab.              (Hinlänglichkeit)
(2)  Keine echte Teilmenge leitet sie ab.        (Unverzichtbarkeit)
```

Symbolerklärung:

- $\vdash$: "ist ableitbar".
- $\subsetneq$: "echte Teilmenge von".
- $\nvdash$: "ist nicht ableitbar".

In Umgangssprache: Eine Axiomenmenge ist minimal für eine Zielaussage, wenn sie die Zielaussage ableitet **und** wenn man kein einziges Axiom weglassen kann, ohne dass die Ableitung zusammenbricht.

Das ist die Definition, mit der Modal 6 arbeitet. Es geht nicht um "Minimalität" im absoluten Sinn, sondern um Minimalität **relativ zu einer Zielaussage**.

2. Die fünf Superpositionsaxiome

```
ASP1   C @w_super
ASP2   ∀v (w_super R v → (C @v ↔ v = w_super))
ASP3   ∀x Tr(x) @w_super
ASP4   ∀v (w_super R v → ∀x Tr(x) @v)
ASP5   ∀v (v ≠ w_super → w_super R v)
```

Symbolerklärung (Wiederholung):

- `C`: Bewusstsein.
- `Tr`: Trinität.
- `w_super`: die ausgezeichnete Welt (Superposition).
- `R`: die Erreichbarkeitsrelation.
- `@w_super`, `@v`: Weltindizes.
- `∀v`: "für alle Welten v".
- `∀x`: "für alle Individuen x".
- `→`: "wenn … dann …".
- `↔`: "genau dann, wenn".
- `=`: Identität.
- `≠`: Negation der Identität.

In Umgangssprache:

- **ASP1:** Bewusstsein gilt in w_super.
- **ASP2:** Bewusstsein gilt nur in w_super.
- **ASP3:** In w_super gilt die Trinität für alle x.
- **ASP4:** Was in w_super gilt, gilt in allen erreichbaren Welten.
- **ASP5:** Jede andere Welt ist von w_super aus erreichbar.

3. Die Frage von Modal 6

Die Frage: Welche der fünf Axiome sind für die Ableitung von `□∀x Tr(x)` unverzichtbar? Welche sind redundant?

Die Antwort (Vorschau):

```
ASP1 ist redundant.              Sie folgt aus ASP2 in S5.
ASP2 ist für die Zielaussage
     nicht nötig, aber für die
```

```
     Superpositions-Intuition wesentlich.
ASP3, ASP4, ASP5 sind unverzichtbar für die Zielaussage.
```

Die minimale Teilmenge für die Zielaussage: {ASP3, ASP4, ASP5}. **Die minimale Teilmenge für die Superpositions-Intuition:** {ASP1, ..., ASP5}.

Teil II — Der Redundanzbeweis für ASP1

1. Die Behauptung

Behauptung: ASP1 ist aus ASP2 in S5 ableitbar.

Formal:

```
{ASP2} ⊢ ASP1    (in S5)
```

Symbolerklärung:

- {ASP2}: die Axiomenmenge, die nur ASP2 enthält.
- ⊢: "ist ableitbar".
- ASP1: die Zielaussage.

In Umgangssprache: Wenn man ASP2 als Axiom hat, kann man ASP1 daraus ableiten. ASP1 ist also keine zusätzliche Annahme — sie ist in ASP2 schon enthalten.

2. Der Beweis Zug für Zug

Die Ausgangsstellung: Wir haben ASP2 als Axiom. Wir wollen ASP1 ableiten.

Zug 1 — ASP2 aufschreiben

```
BRETT       (leer – der Beweis beginnt)
ZUG         ASP2 als Axiom einsetzen
SYMBOLE     ASP2 := ∀v (w_super R v → (C @v ↔ v = w_super))
WARUM       ASP2 ist als Axiom verfügbar. Wir schreiben es auf, um es
            später zu instanziieren.
UMGANG      "Für jede Welt v gilt: Wenn v von w_super aus erreichbar ist,
            dann gilt Bewusstsein in v genau dann, wenn v gleich w_super
ist."
NEU         Zeile 1: ∀v (w_super R v → (C @v ↔ v = w_super))
```

Zug 2 — ∀-Regel anwenden

```
BRETT       Zeile 1: ∀v (w_super R v → (C @v ↔ v = w_super))
ZUG         ∀-Regel anwenden mit v := w_super
SYMBOLE     ∀-Regel: ∀v A → A[w_super/v]
            [w_super/v] = "ersetze v durch w_super"
WARUM       Die Formel hat die Form ∀v A. Die ∀-Regel erlaubt, für v
            ein beliebiges Individuum einzusetzen – hier w_super selbst.
```

```
UMGANG      "Wir setzen für v die Welt w_super selbst ein. Dann steht da:
            Wenn w_super von w_super aus erreichbar ist, dann gilt
            Bewusstsein in w_super genau dann, wenn w_super gleich w_super
ist."
NEU         Zeile 2: w_super R w_super → (C @w_super ↔ w_super = w_super)
```

Zug 3 — Reflexivität von R in S5

```
BRETT       Zeile 2: w_super R w_super → (C @w_super ↔ w_super = w_super)
ZUG         Reflexivität von R in S5 anwenden
SYMBOLE     In S5 ist R reflexiv: ∀w (w R w)
WARUM       In S5 gilt die Reflexivität der Erreichbarkeitsrelation.
            Also gilt insbesondere w_super R w_super.
UMGANG      "Jede Welt ist von sich selbst aus erreichbar – also auch
            w_super von w_super."
NEU         Zeile 3: w_super R w_super
```

Zug 4 — Modus Ponens

```
BRETT       Zeile 2: w_super R w_super → (C @w_super ↔ w_super = w_super)
            Zeile 3: w_super R w_super
ZUG         Modus Ponens anwenden
SYMBOLE     aus A und A → B folgt B
WARUM       Wir haben A (Zeile 3) und A → B (Zeile 2). Also folgt B.
UMGANG      "Also gilt: Bewusstsein in w_super genau dann, wenn
            w_super gleich w_super ist."
NEU         Zeile 4: C @w_super ↔ w_super = w_super
```

Zug 5 — Identität

```
BRETT       Zeile 4: C @w_super ↔ w_super = w_super
ZUG         Identität anwenden
SYMBOLE     w_super = w_super ist immer wahr (Identität)
WARUM       Jedes Ding ist mit sich selbst identisch. Also ist
            w_super = w_super wahr.
UMGANG      "w_super ist gleich w_super – das ist immer wahr."
NEU         Zeile 5: w_super = w_super
```

Zug 6 — Äquivalenz auflösen

```
BRETT       Zeile 4: C @w_super ↔ w_super = w_super
            Zeile 5: w_super = w_super
ZUG         Äquivalenz auflösen
SYMBOLE     aus A ↔ B und B folgt A
WARUM       Wir haben A ↔ B (Zeile 4) und B (Zeile 5). Also folgt A.
UMGANG      "Also gilt: Bewusstsein in w_super."
NEU         Zeile 6: C @w_super
```

Zug 7 — Ergebnis

```
BRETT       Zeile 6: C @w_super
ZUG         Feststellen: Das ist ASP1
SYMBOLE     ASP1 := C @w_super
```

```
WARUM       Zeile 6 ist genau ASP1.
UMGANG      "Wir haben ASP1 abgeleitet – aus ASP2 allein."
NEU         ASP1 ist abgeleitet.
```

Endergebnis

```
FORMAL      {ASP2} ⊢ ASP1    (in S5)
UMGANG      "ASP1 ist aus ASP2 ableitbar. ASP1 ist also redundant –
            sie ist in ASP2 schon enthalten."
```

3. Was der Beweis zeigt

Was der Beweis zeigt:

- ASP1 ist **keine zusätzliche Annahme**. Sie folgt aus ASP2.
- In der vollen Axiomatik `{ASP1, ..., ASP5}` ist ASP1 **redundant**.
- Man kann ASP1 **weglassen**, ohne die Ableitungsstärke zu verlieren.

Was der Beweis nicht zeigt:

- Dass ASP1 **falsch** ist. Sie ist wahr — aber ableitbar.
- Dass ASP1 **überflüssig** ist für die Superpositions-Intuition. Sie ist nützlich für die Klarheit der Intuition, auch wenn sie formal redundant ist.

Die metalogische Pointe: Redundanz ist **kein Fehler**. Sie ist eine **Eigenschaft** einer Axiomenmenge. Man kann redundante Axiome behalten, wenn sie die Intuition klären — oder weglassen, wenn man minimale Axiomensysteme will.

Teil III — Die Unverzichtbarkeit von ASP3, ASP4, ASP5

1. Die Strategie

Die Strategie: Für jedes der drei Axiome ASP3, ASP4, ASP5 konstruieren wir ein **Gegenmodell** — ein Modell, in dem gilt:

```
(1)  Alle anderen Axiome gelten.
(2)  Das jeweilige Axiom ist verletzt.
(3)  Die Zielaussage □∀x Tr(x) ist falsch.
```

Symbolerklärung:

- `□`: Notwendigkeit.
- `∀x`: für alle x.
- `Tr(x)`: die Trinität gilt für x.
- `□∀x Tr(x)`: “notwendig gilt für alle x die Trinität”.

In Umgangssprache: Ein Gegenmodell ist eine **konkrete Situation**, in der die anderen Axiome gelten, das jeweilige Axiom aber nicht — und in der die Trinität **nicht** notwendig gilt. Wenn es ein solches Modell gibt, dann kann man das jeweilige Axiom **nicht weglassen** — die Zielaussage wäre dann nicht mehr ableitbar.

Die drei Gegenmodelle:

```
Gegenmodell 1:  ASP3 verletzt, ASP4 und ASP5 gelten.
Gegenmodell 2:  ASP4 verletzt, ASP3 und ASP5 gelten.
Gegenmodell 3:  ASP5 verletzt, ASP3 und ASP4 gelten.
```

2. Gegenmodell 1 — ASP3 verletzt

Die Idee: Es gibt eine Welt `w_super` und eine Welt `w*`. In `w_super` gilt die Trinität **nicht** für alle x (ASP3 verletzt). Aber `w*` ist von `w_super` aus erreichbar, und in `w*` gilt die Trinität für alle x (ASP4 erfüllt). Und jede andere Welt ist von `w_super` aus erreichbar (ASP5 erfüllt).

Das Modell in Formeln:

```
W = {w_super, w*}
R = W × W (universell)
I:
  Tr(a) @w_super ist FALSCH für ein Individuum a.
  Tr(x) @w* ist WAHR für alle x.
```

Symbolerklärung:

- `W`: die Menge der Welten.
- `R`: die Erreichbarkeitsrelation.
- `I`: die Interpretationsfunktion.
- `W × W`: die Menge aller Paare von Welten (universelle Relation).
- `Tr(a) @w_super ist FALSCH`: In w_super gilt die Trinität nicht für a.
- `Tr(x) @w* ist WAHR`: In w* gilt die Trinität für alle x.

Prüfung der Axiome:

```
ASP3:  ∀x Tr(x) @w_super     →  VERLETZT (weil Tr(a) @w_super falsch ist)
ASP4:  ∀v (w_super R v → ∀x Tr(x) @v)
       →  ERFÜLLT (denn die einzigen erreichbaren Welten sind w_super
          und w*. In w* gilt ∀x Tr(x). In w_super gilt es nicht –
          aber ASP4 sagt nur: "Was in w_super gilt, gilt in allen
          erreichbaren Welten." Da in w_super nicht ∀x Tr(x) gilt,
          ist die Implikation leer erfüllt.)
ASP5:  ∀v (v ≠ w_super → w_super R v)
       →  ERFÜLLT (denn R ist universell, also ist jede Welt erreichbar)
```

Prüfung der Zielaussage:

```
□∀x Tr(x) @w_super ist FALSCH (weil Tr(a) @w_super falsch ist).
Also gilt ¬□∀x Tr(x) im Modell.
```

Ergebnis: Ohne ASP3 ist die Zielaussage nicht ableitbar. **ASP3 ist unverzichtbar.**

3. Gegenmodell 2 — ASP4 verletzt

Die Idee: Es gibt eine Welt `w_super` und eine Welt `w1`. In `w_super` gilt die Trinität für alle x (ASP3 erfüllt). Aber in `w1` gilt sie **nicht** für alle x, obwohl `w1` von `w_super` aus erreichbar ist (ASP4 verletzt). Und jede andere Welt ist von `w_super` aus erreichbar (ASP5 erfüllt).

Das Modell in Formeln:

```
W = {w_super, w1}
R = W × W (universell)
I:
  Tr(x) @w_super ist WAHR für alle x.
  Tr(a) @w1 ist FALSCH für ein Individuum a.
```

Prüfung der Axiome:

```
ASP3:  ∀x Tr(x) @w_super     →  ERFÜLLT
ASP4:  ∀v (w_super R v → ∀x Tr(x) @v)
       →  VERLETZT (denn w_super R w1, aber ¬Tr(a) @w1)
ASP5:  ∀v (v ≠ w_super → w_super R v)
       →  ERFÜLLT (denn R ist universell)
```

Prüfung der Zielaussage:

```
□∀x Tr(x) @w1 ist FALSCH (weil Tr(a) @w1 falsch ist).
Also gilt ¬□∀x Tr(x) im Modell.
```

Ergebnis: Ohne ASP4 ist die Zielaussage nicht ableitbar. **ASP4 ist unverzichtbar.**

4. Gegenmodell 3 — ASP5 verletzt

Die Idee: Es gibt eine Welt `w_super` und eine Welt `w1`. In `w_super` gilt die Trinität für alle x (ASP3 erfüllt). In `w1` gilt sie **nicht** für alle x. Aber `w1` ist **nicht** von `w_super` aus erreichbar (ASP5 verletzt). Die Relation R ist also **nicht** universell — `w_super` und `w1` sind isoliert.

Das Modell in Formeln:

```
W = {w_super, w1}
R = {(w_super, w_super), (w1, w1)}   (zwei isolierte Klassen)
I:
  Tr(x) @w_super ist WAHR für alle x.
  Tr(a) @w1 ist FALSCH für ein Individuum a.
```

Symbolerklärung:

- `{(w_super, w_super), (w1, w1)}`: die Relation enthält nur die reflexiven Paare — jede Welt ist nur von sich selbst aus erreichbar.
- `zwei isolierte Klassen`: w_super und w1 sind voneinander getrennt.

Prüfung der Axiome:

```
ASP3:  ∀x Tr(x) @w_super     →  ERFÜLLT
ASP4:  ∀v (w_super R v → ∀x Tr(x) @v)
       →  ERFÜLLT (denn die einzige von w_super erreichbare Welt ist
          w_super selbst – und dort gilt ∀x Tr(x))
ASP5:  ∀v (v ≠ w_super → w_super R v)
       →  VERLETZT (denn w1 ≠ w_super, aber w_super R w1 gilt nicht)
```

Prüfung der Zielaussage:

```
□∀x Tr(x) @w1 ist FALSCH (weil Tr(a) @w1 falsch ist).
Also gilt ¬□∀x Tr(x) im Modell.
```

Ergebnis: Ohne ASP5 ist die Zielaussage nicht ableitbar. **ASP5 ist unverzichtbar.**

5. Zusammenfassung der drei Gegenmodelle

```
Gegenmodell 1:  ASP3 verletzt, ASP4 und ASP5 gelten.
                →  ASP3 ist unverzichtbar.

Gegenmodell 2:  ASP4 verletzt, ASP3 und ASP5 gelten.
                →  ASP4 ist unverzichtbar.

Gegenmodell 3:  ASP5 verletzt, ASP3 und ASP4 gelten.
                →  ASP5 ist unverzichtbar.
```

Die Pointe: Für jedes der drei Axiome gibt es ein Modell, in dem die **anderen** Axiome gelten, das jeweilige Axiom aber verletzt ist — und in dem die Zielaussage falsch ist. Also kann man **keines** der drei weglassen.

Teil IV — Die Relativität der Minimalität

1. Zwei minimale Teilmengen

Die minimale Teilmenge für die Zielaussage:

```
{ASP3, ASP4, ASP5}
```

Begründung: Sie leitet □∀x Tr(x) ab (Modal 5), und keine echte Teilmenge leitet sie ab (Teil III dieser Datei).

Die minimale Teilmenge für die Superpositions-Intuition:

```
{ASP1, ASP2, ASP3, ASP4, ASP5}
```

Begründung: Sie formalisiert die volle Intuition (Bewusstsein ist der selbstreflexive Moment der Superposition). ASP1 ist redundant, aber nützlich für die Klarheit. ASP2 ist für die Zielaussage nicht nötig, aber für die Intuition wesentlich.

2. Die Relativität in Umgangssprache

Der Begriff „minimal" ist relativ. Es gibt nicht **die** minimale Axiomenmenge — es gibt **zwei**, je nachdem, was man ableiten will:

```
Will man nur die Trinität ableiten:
  → {ASP3, ASP4, ASP5} ist minimal.

Will man die volle Superpositions-Intuition formalisieren:
  → {ASP1, ASP2, ASP3, ASP4, ASP5} ist minimal (bis auf die
    Redundanz von ASP1).
```

Das ist kein Mangel. Es ist eine **Einsicht**: Der Begriff der Minimalität hängt vom **Ziel** ab. Je nach Ziel ist eine andere Axiomenmenge minimal.

3. Was das für die Reihe bedeutet

Was bleibt:

- Die Trinität ist aus `{ASP3, ASP4, ASP5}` ableitbar.
- Die Superpositions-Intuition braucht `{ASP1, ..., ASP5}`.
- ASP1 ist redundant — sie folgt aus ASP2.

Was nicht bleibt:

- Die Vorstellung, es gäbe **eine** minimale Axiomenmenge.
- Die Vorstellung, Minimalität sei absolut.

Die metalogische Konsequenz: Die Analyse der Minimalität ist **relativ** — sie hängt vom Ziel ab. Das ist eine **Einsicht**, kein Defekt.

Nachwort

Sie haben diese Datei gelesen. Sie haben den Redundanzbeweis für ASP1 Zug für Zug verfolgt — mit Symbolerklärung bei jedem Schritt und Umgangssprache bei jeder Aussage. Sie haben die drei Gegenmodelle für ASP3, ASP4, ASP5 gesehen. Sie haben die Relativität der Minimalität verstanden.

Was bleibt, ist die Einsicht:

```
ASP1 ist redundant.
ASP3, ASP4, ASP5 sind unverzichtbar.
Minimalität ist relativ – sie hängt vom Ziel ab.
```

Die nächste Datei (Modal 7) behandelt die **Nicht-Eindeutigkeit**: Es gibt mindestens vier systematisch verschiedene Erweiterungen von S5, die alle die Trinität ableiten. Die Trinität ist **axiomen-invariant**.

Diese Datei wurde im Geiste strenger Modallogik verfasst, jedoch in der Sprache eines Schachjournalisten — denn der Beweisgang bedarf beider: der Präzision der Formel und der Anschaulichkeit des Zuges.