Die Nicht-Eindeutigkeit der Superpositionsaxiome

Modal 7 — im Stil eines Schachjournalisten erklärt

Paul Koop

Vorbemerkung: Wie diese Datei zu lesen ist

Diese Datei erklärt **Modal 7**: die Frage, ob die Superpositionsaxiome der **einzige** Weg sind, die Trinität abzuleiten — oder ob es **andere** Erweiterungen von S5 gibt, die ebenfalls die Trinität ableiten.

Sie ist im **selben Stil** wie die vorigen Dateien geschrieben: Zug für Zug, mit Symbolerklärung bei jedem Schritt, mit Umgangssprache bei jeder Aussage.

Was vorausgesetzt wird: Die Dateien zu Modal 5 und Modal 6 sollten gelesen sein. Insbesondere werden die Tableau-Regeln, die Superpositionsaxiome ASP1–ASP5 und die Minimalitätsanalyse als bekannt vorausgesetzt.

Was diese Datei leistet: Sie zeigt drei Dinge:

1. Es gibt **mindestens vier** systematisch verschiedene Erweiterungen von S5, die die Trinität ableiten: Superposition, Topologie, Temporalität, Mereologie.
2. Die Trinität ist **axiomen-invariant** — sie ist nicht an eine bestimmte metaphysische Sprache gebunden.
3. Die Wahl der Erweiterung ist eine **metaphysische, physikalische oder hermeneutische** Frage — keine metalogische.

Teil I — Die Frage

1. Was heißt „systematisch verschieden"?

Zwei Erweiterungen von S5 sind **systematisch verschieden**, wenn gilt:

```
(1)  Sie verwenden verschiedene nicht-logische Symbole.       (sprachlich)
(2)  Sie beruhen auf verschiedenen metaphysischen Grundbegriffen.
(strukturell)
(3)  Sie sind nicht in S5 äquivalent.                          (semantisch)
```

Symbolerklärung:

- `S5`: das modallogische System S5.
- `nicht-logische Symbole`: Zeichen, die nicht zur Grundausstattung der Logik gehören (z.B. `w_super`, `L`, `P`, `F`, $\preccurlyeq$).

- `äquivalent in S5`: zwei Erweiterungen sind äquivalent, wenn sie in S5 dieselben Modelle haben.

In Umgangssprache: Zwei Erweiterungen sind systematisch verschieden, wenn sie **verschiedene Sprachen** sprechen, **verschiedene Grundbegriffe** verwenden und **nicht** dieselben Modelle haben.

Wichtig: Systematische Verschiedenheit ist **stärker** als bloße syntaktische Verschiedenheit. Zwei Erweiterungen können syntaktisch verschieden sein, aber semantisch äquivalent (z.B. wenn sie nur die Reihenfolge der Axiome vertauschen). Systematische Verschiedenheit verlangt **strukturelle** Verschiedenheit.

2. Die vier Erweiterungen

Modal 7 konstruiert **vier** Erweiterungen:

```
1.  Superposition (ASP1–ASP5)    – der bisherige Weg
2.  Topologie (TOP1–TOP5)        – Grenzwertaxiome
3.  Temporalität (T1–T4)         – Zeitmodi
4.  Mereologie (MER1–MER5)       – Teil-Ganzes-Axiome
```

Die Frage: Leiten alle vier die Trinität ab? Und sind sie systematisch verschieden?

Die Antwort (Vorschau): Ja. Alle vier leiten `□∀x Tr(x)` ab. Sie sind systematisch verschieden. Die Trinität ist **axiomen-invariant**.

Teil II — Die topologische Erweiterung (TOP)

1. Die Grundidee

Die Grundidee: Statt der Superposition (eines Urzustands) verwendet die topologische Erweiterung den Begriff des **Grenzwerts**. Die Trinität wird als **Limes** einer Folge von Welten verstanden.

Metaphysische Grundbegriffe: Grenzwert, Konvergenz, Nachbarschaft, Topologie.

Das neue Symbol: Der **Grenzwertoperator** `L` (gesprochen: „Limes"). `L p` bedeutet: „p gilt im Grenzwert einer Folge von Welten."

2. Die Axiome TOP1–TOP5

```
TOP1   □(N p → p)
TOP2   □(L p → ◇p)
TOP3   □(L(p → q) → (L p → L q))
TOP4   □(N(U ∧ T ∧ S) → L(U ∧ T ∧ S))
TOP5   □(L(U ∧ T ∧ S) → □(U ∧ T ∧ S))
```

Symbolerklärung:

- `N`: Nachbarschaftsoperator. `N p` = „p gilt in einer Nachbarschaft der aktuellen Welt."
- `L`: Grenzwertoperator. `L p` = „p gilt im Grenzwert einer Folge von Welten."
- □: Notwendigkeit.
- ◇: Möglichkeit.
- →: Implikation.
- ∧: Konjunktion.
- `U`, `T`, `S`: die drei Grenzwerte der Trinität.

In Umgangssprache:

- **TOP1:** Was in einer Nachbarschaft gilt, gilt auch aktuell.
- **TOP2:** Was im Grenzwert gilt, ist mindestens möglich.
- **TOP3:** Der Grenzwertoperator distribuiert über Implikation.
- **TOP4:** Wenn eine Nachbarschaft die Trinität enthält, dann auch der Grenzwert.
- **TOP5:** Was im Grenzwert gilt, gilt notwendig.

3. Der Beweis in Umgangssprache

Ziel: Zeigen, dass in S5+TOP die Trinität ableitbar ist.

Der Beweis in fünf Schritten:

```
Schritt 1:  Aus A4 folgt: ◇∃w Welt(w).
Schritt 2:  Aus A1, A11, A12 folgt: ◇C (Bewusstsein ist möglich).
Schritt 3:  Aus A13, A14, A15 und der Äquivalenz von T, U, S folgt:
            In jeder Welt mit Bewusstsein gilt eine Nachbarschaft,
            in der die Trinität lokal gilt.
Schritt 4:  Aus TOP4 folgt: L(U ∧ T ∧ S).
Schritt 5:  Aus TOP5 folgt: □(U ∧ T ∧ S), d.h. □∀x Tr(x).
```

In Umgangssprache: Wenn es eine Nachbarschaft gibt, in der die Trinität gilt, dann gilt sie auch im Grenzwert (TOP4). Und was im Grenzwert gilt, gilt notwendig (TOP5). Also gilt die Trinität notwendig.

Die Pointe: Die topologische Erweiterung leitet die Trinität ab — aber auf **strukturell verschiedene Weise** als die Superposition. Sie verwendet nicht den Begriff des Urzustands, sondern den Begriff des Grenzwerts.

Teil III — Die temporale Erweiterung (TEMP)

1. Die Grundidee

Die Grundidee: Statt der Superposition verwendet die temporale Erweiterung den Begriff der **Zeit**. Die Trinität wird als **zeitlose Struktur** verstanden, die sich in der Gegenwart manifestiert.

Metaphysische Grundbegriffe: Vergangenheit, Zukunft, Gegenwart, Zeitlosigkeit.

Die neuen Symbole:

```
P   Vergangenheit: "Es war der Fall, dass p."
F   Zukunft:       "Es wird der Fall sein, dass p."
N   Gegenwart:     "Es ist jetzt der Fall, dass p."
Z   Zeitlosigkeit: "Es ist zeitlos der Fall, dass p."
```

2. Die Axiome T1–T4

```
T1   □(N p → p)
T2   □(P p → ¬N p)
T3   □(Z p → □p)
T4   □(◇p → (P p ∨ N p ∨ F p ∨ Z p))
```

Symbolerklärung:

- `P`, `F`, `N`, `Z`: die vier Zeitmodi.
- □: Notwendigkeit.
- ◇: Möglichkeit.
- →: Implikation.
- ¬: Negation.
- ∨: Disjunktion.

In Umgangssprache:

- **T1:** Was gegenwärtig ist, ist wirklich.
- **T2:** Was vergangen ist, ist nicht gegenwärtig.
- **T3:** Was zeitlos ist, ist notwendig.
- **T4:** Jede Möglichkeit ist entweder vergangen, gegenwärtig, zukünftig oder zeitlos.

3. Der Beweis in Umgangssprache

Ziel: Zeigen, dass in S5+T1–T4 die Trinität ableitbar ist.

Der Beweis in fünf Schritten:

```
Schritt 1:  Aus A4 und A1, A11, A12 folgt: ◇C.
Schritt 2:  Nach T4 ist ◇C entweder P C, N C, F C oder Z C.
Schritt 3:  In jedem dieser Fälle folgt aus A13–A15, dass die Trinität
            in einer Nachbarschaft der Gegenwart gilt.
Schritt 4:  Die Trinität ist zeitlos – d.h. Z(U ∧ T ∧ S).
Schritt 5:  Nach T3 folgt: □(U ∧ T ∧ S), d.h. □∀x Tr(x).
```

In Umgangssprache: Jede Möglichkeit hat einen temporalen Ort (Vergangenheit, Gegenwart, Zukunft, Zeitlosigkeit). In jedem dieser Orte folgt aus den Basisaxiomen, dass die Trinität gilt. Und weil sie zeitlos gilt, gilt sie notwendig (T3).

Die Pointe: Die temporale Erweiterung verwendet **vier** statt fünf Axiome. Sie ist damit **axiomatisch sparsamer** als die Superposition — ein weiteres Zeichen für Nicht-Eindeutigkeit.

Teil IV — Die mereologische Erweiterung (MER)

1. Die Grundidee

Die Grundidee: Statt der Superposition verwendet die mereologische Erweiterung den Begriff des **Teil-Ganzes**. Die Trinität wird als **Ganze** verstanden, das seine Teile umfasst.

Metaphysische Grundbegriffe: Teil, Ganzes, Summe, Integration.

Die neuen Symbole:

```
⩽       Teil-Relation: "x ist Teil von y."
Σ       Summen-Operator: "Die Summe der x, für die p(x) gilt."
```

2. Die Axiome MER1–MER5

```
MER1   □∀x (x ⩽ x)
MER2   □∀x∀y ((x ⩽ y ∧ y ⩽ x) → x = y)
MER3   □∀x∀y∀z ((x ⩽ y ∧ y ⩽ z) → x ⩽ z)
MER4   □∀p (∃x p(x) → ∃z (z = Σx . p(x)))
MER5   □∀x (x ⩽ Σy . Tr(y))
```

Symbolerklärung:

- ⩽: Teil-Relation.
- Σ: Summen-Operator.
- □: Notwendigkeit.
- ∀: Allquantor.
- ∃: Existenzquantor.
- ∧: Konjunktion.
- →: Implikation.
- =: Identität.

In Umgangssprache:

- **MER1:** Jedes Ding ist Teil von sich selbst (Reflexivität).
- **MER2:** Wenn x Teil von y und y Teil von x ist, dann ist x = y (Antisymmetrie).
- **MER3:** Wenn x Teil von y und y Teil von z ist, dann ist x Teil von z (Transitivität).
- **MER4:** Für jede nicht-leere Eigenschaft gibt es eine Summe.
- **MER5:** Jedes Ding ist Teil der Summe aller trinitarischen Individuen.

3. Der Beweis in Umgangssprache

Ziel: Zeigen, dass in S5+MER die Trinität ableitbar ist.

Der Beweis in fünf Schritten:

```
Schritt 1:  Aus MER4 folgt: Es gibt eine Summe Σx . Tr(x).
Schritt 2:  Aus MER5 folgt: Jedes Individuum ist Teil dieser Summe.
Schritt 3:  Aus A1 (Monismus) folgt: Es gibt keine fundamental
            getrennten Bereiche – also ist die Summe die Totalität T.
Schritt 4:  Aus MER2 (Antisymmetrie) folgt: Die Summe ist eindeutig.
Schritt 5:  Aus A13–A15 und der Eindeutigkeit der Summe folgt:
            □∀x Tr(x).
```

In Umgangssprache: Es gibt eine Summe aller trinitarischen Individuen. Jedes Individuum ist Teil dieser Summe. Weil es keine fundamental getrennten Bereiche gibt (A1), ist die Summe die Totalität T. Und weil die Summe eindeutig ist (MER2), gilt die Trinität notwendig.

Die Pointe: Die mereologische Erweiterung verwendet den Begriff des Teil-Ganzes — nicht den der Superposition, nicht den des Grenzwerts, nicht den der Zeit. Sie ist **strukturell verschieden** von den anderen drei.

Teil V — Der Vergleich der vier Erweiterungen

1. Was haben sie gemeinsam?

Alle vier Erweiterungen:

```
(1)  Erweitern S5 um zusätzliche Axiome.
(2)  Leiten die Trinität ab: □∀x Tr(x).
(3)  Verwenden den Monismus (A1) als Grundlage.
(4)  Sind axiomatisch nicht-redundant – jedes Axiom trägt zur Ableitung bei.
```

2. Was unterscheidet sie?

Die Tabelle in Umgangssprache:

Kriterium	Superposition	Topologie	Temporalität	Mereologie
Grundbegriff	Urzustand	Grenzwert	Zeit	Teil-Ganzes
Zentrale Operatoren	C, R	L, N	P, F, N, Z	≼, Σ
Anzahl Axiome	5	5	4	5
Struktur der Ableitung	Übertragung	Konvergenz	Zeitmodi	Summe
Metaphysische Tradition	Schelling	Kant	Augustinus	

```
Aristoteles
Physikalische
  Analogie              Quantenmechanik  Topologie    Zeitpfeil       Physik
```

In Umgangssprache: Die vier Erweiterungen unterscheiden sich in **Grundbegriff**, **Operatoren**, **Anzahl der Axiome**, **Struktur der Ableitung**, **metaphysischer Tradition** und **physikalischer Analogie**.

3. Die strukturelle Verschiedenheit

Die vier Erweiterungen sind **strukturell verschieden**:

```
Superposition   verortet die Trinität in einem Urzustand.
Topologie       verortet die Trinität in einem Grenzwert.
Temporalität    verortet die Trinität in der Zeitlosigkeit.
Mereologie      verortet die Trinität in der Summe aller trinitarischen
                Individuen.
```

Diese Verortungen sind **nicht äquivalent**. Sie sind verschiedene **Perspektiven** auf dieselbe Struktur.

Teil VI — Die Axiomen-Invarianz

1. Das Hauptergebnis

Satz SYN: Die Trinitätsformel $\Box\forall x\ Tr(x)$ ist **axiomen-invariant** in dem Sinne, dass sie aus mindestens vier systematisch verschiedenen Erweiterungen von S5 folgt.

Beweis: Direkt aus den Sätzen TOP-A, TEMP-A, MER-A und dem Ergebnis von Modal 5.

In Umgangssprache: Die Trinität folgt aus **mindestens vier** verschiedenen Erweiterungen von S5. Sie ist nicht an eine bestimmte metaphysische Sprache gebunden.

2. Was folgt daraus?

Konsequenz 1: Die Trinitätsstruktur ist **nicht** an eine bestimmte metaphysische Sprache gebunden. Sie ist in verschiedenen Sprachen formulierbar.

Konsequenz 2: Die Wahl der Erweiterung ist **nicht** durch die Zielaussage allein determiniert. Sie hängt von metaphysischen, physikalischen oder hermeneutischen Präferenzen ab.

Konsequenz 3: Die Frage “Welche Erweiterung ist die richtige?” ist **keine** metalogische Frage. Sie ist eine metaphysische, physikalische oder hermeneutische Frage.

3. Die Robustheit der Trinität

Die Tatsache, dass die Trinitätsformel aus mindestens vier systematisch verschiedenen Erweiterungen folgt, zeigt: Sie ist **robust** gegenüber der Wahl der metaphysischen Sprache. Sie ist nicht eine Konsequenz einer bestimmten Axiomatik, sondern eine **Struktur**, die sich in verschiedenen Axiomatiken wiederfindet.

Was bleibt: Die **Notwendigkeit einer Zusatzstruktur überhaupt**. Reines S5 reicht nicht (Modal 5). Die Zusatzstruktur ist **unvermeidbar** — aber ihre **Form** ist nicht eindeutig.

Teil VII — Was offen bleibt

1. Die Frage nach der kanonischen Erweiterung

Frage: Gibt es eine Erweiterung, die **kanonisch** ist — d.h. eine, die aus metaphysischen oder physikalischen Gründen **ausgezeichnet** ist?

Mögliche Antwort: Die Superpositions-Erweiterung ist ausgezeichnet durch ihre Nähe zur Quantenmechanik. Aber diese Auszeichnung ist **physikalisch**, nicht **metalogisch**.

2. Die Frage nach weiteren Erweiterungen

Frage: Gibt es **weitere** systematisch verschiedene Erweiterungen?

Mögliche Antworten:

```
Eine informationstheoretische Erweiterung (Information als Grundbegriff).
Eine prozessphilosophische Erweiterung (Prozess als Grundbegriff).
Eine phänomenologische Erweiterung (Erfahrung als Grundbegriff).
```

Was wir gezeigt haben: Es gibt **mindestens vier**. Ob es **genau vier** sind, ist offen.

3. Die Frage nach dem gemeinsamen Kern

Frage: Alle vier Erweiterungen leiten die Trinität ab. Was ist der **gemeinsame Kern**?

Mögliche Antwort: Der gemeinsame Kern ist die **Notwendigkeit einer Zusatzstruktur überhaupt**. Reines S5 reicht nicht. Aber die Form der Zusatzstruktur ist variabel.

Nachwort

Sie haben diese Datei gelesen. Sie haben die vier Erweiterungen von S5 kennengelernt: Superposition, Topologie, Temporalität, Mereologie. Sie haben gesehen, dass alle vier die Trinität ableiten — auf strukturell verschiedene Weise.

Was bleibt, ist die Einsicht:

```
Die Trinität ist axiomen-invariant.
Sie folgt aus mindestens vier systematisch verschiedenen Erweiterungen.
Die Wahl der Erweiterung ist eine metaphysische, physikalische oder
hermeneutische Frage – keine metalogische.
```

Die nächste Datei (Modal 8) behandelt die **topologische Präzisierung**: die formale Fassung der informalen Grenzwertdefinition aus Modal 5 mit dem Operator L und den Axiomen L1–L7.

Diese Datei wurde im Geiste strenger Modallogik verfasst, jedoch in der Sprache eines Schachjournalisten — denn der Beweisgang bedarf beider: der Präzision der Formel und der Anschaulichkeit des Zuges.